



## VARIABLES A DENSITE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE :

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$   $n$  variables aléatoires indépendantes ( $n \geq 2$ ) qui suivent la loi uniforme sur  $[a, b]$ ,  $a < b$ .

1) On pose  $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de  $Z_n$  et en déduire une densité puis son espérance  $E(Z_n)$ .

b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n)$ .

2) On pose  $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de  $Y_n$ .

b) Calculer son espérance  $E(Y_n)$ . Quelle est la limite de  $E(Y_n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ?

3) Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $E(Z_n)$  et  $E(Y_n)$ .

En déduire deux estimateurs de  $a$  et  $b$ .

## INDICATIONS DE SOLUTION

- 1) a) On trouve  $g(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$  pour  $x \in [a, b]$  et 0 ailleurs.
- b) Penser à un changement de variable : on trouve  $E(Z_n) = \frac{nb+a}{n+1}$ .
- 2) a) Penser à l'événement  $\min(X_1, \dots, X_n) > x$ . On trouvera pour  $F_n$ , répartition de  $Y_n$ ,
- $$\begin{cases} F_n(x) &= 0 & \text{pour } x \leq a \\ F_n(x) &= 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n & \text{pour } a \leq x \leq b \\ F - n(x) &= 1 & \text{pour } x \geq b \end{cases}$$
- b)  $E(Y_n) = \frac{na+b}{n+1}$ .
- 3)  $\frac{nY_n - Z_n}{n-1}$  est un estimateur de  $a$  ;  $\frac{nZ_n - Y_n}{n-1}$  est un estimateur de  $b$ .