VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes $(n \geq 2)$ qui suivent la loi uniforme sur $[a, b]$, $a < b$.

1) On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n et en déduire une densité puis son espérance $E(Z_n)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(Z_n)$.

2) On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y_n.

b) Calculer son espérance $E(Y_n)$. Quelle est la limite de $E(Y_n)$ lorsque $n \to +\infty$?

3) Exprimer a et b en fonction de $E(Z_n)$ et $E(Y_n)$.

En déduire deux estimateurs de a et b.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

1) a) On trouve $g(x) = \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n$ pour $x \in [a,b]$ et 0 ailleurs.

b) Penser à un changement de variable : on trouve $E(Z_n) = \dfrac{nb+a}{n+1}\cdot$

2) a) Penser à l'événement $\min(X_1, \ldots, X_n) > x$. On trouvera pour F_n, répartition de Y_n,

$$\begin{cases} F_n(x) & = & 0 & \text{pour } x \leq a \\ F_n(x) & = & 1 - \left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^n & \text{pour } a \leq x \leq b \\ F - n(x) & = & 1 & \text{pour } x \geq b \end{cases}$$

b) $E_(Y_n) = \dfrac{na+b}{n+1}\cdot$

3) $\dfrac{nY_n - Z_n}{n-1}$ est un estimateur de a ; $\dfrac{nZ_n - Y_n}{n-1}$ est un estimateur de b.