VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \exp(-|x|)\ln(1 + e^{|x|}).$$

Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale

$K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\ln(1 + e^t)dt$ converge.

2) Vérifier que $\forall t \geq 0,\ e^{-t}\ln(1 + e^t) = te^{-t} + e^{-t}\ln(1 + e^{-t})$.

3) Calculer les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt \quad \text{et} \quad D = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(1 + e^{-t})dt.$$

En déduire la convergence et la valeur de J.

4) Déterminer le réel a tel que l'application $f = ag$ soit une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X de densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{4\ln 2}\exp(-|x|)\ln(1 + e^{|x|}).$$

On note

$$I(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt.$$

5) Montrer que $I(X)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ converge.

6) Montrer que, sous réserve de convergence des intégrales,

$$I(X) = \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt}_{U} + \underbrace{\int_0^{+\infty} te^{-t}\ln(1 + e^{-t})dt}_{V}.$$

7) Etablir la convergence des intégrales U et V

8) En déduire que l'espérance $E(X)$ existe et la calculer.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Penser à la parité de g.

3) Pour D on trouvera $2\ln 2 - 1$ après une intégration par parties. Pour K, on trouvera $K = C + D = 2\ln 2$.

7) Penser aux croissances comparées ou, pour U, à une loi exponentielle.

8) On trouvera $E(X) = 0$.