



VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

1) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \exp(-|x|) \ln(1 + e^{|x|}).$$

Montrer que l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale

$$K = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln(1 + e^t) dt \text{ converge.}$$

2) Vérifier que $\forall t \geq 0, e^{-t} \ln(1 + e^t) = te^{-t} + e^{-t} \ln(1 + e^{-t})$.

3) Calculer les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \text{ et } D = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(1 + e^{-t}) dt.$$

En déduire la convergence et la valeur de J .

4) Déterminer le réel a tel que l'application $f = ag$ soit une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X de densité g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{1}{4 \ln 2} \exp(-|x|) \ln(1 + e^{|x|}).$$

On note

$$I(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt.$$

5) Montrer que $I(X)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} tg(t) dt$ converge.

6) Montrer que, sous réserve de convergence des intégrales,

$$I(X) = \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_U + \underbrace{\int_0^{+\infty} te^{-t} \ln(1 + e^{-t}) dt}_V.$$

7) Etablir la convergence des intégrales U et V

8) En déduire que l'espérance $E(X)$ existe et la calculer.

INDICATIONS DE SOLUTION

- 1) Penser à la parité de g .
- 3) Pour D on trouvera $2 \ln 2 - 1$ après une intégration par parties. Pour K , on trouvera $K = C + D = 2 \ln 2$.
- 7) Penser aux croissances comparées ou, pour U , à une loi exponentielle.
- 8) On trouvera $E(X) = 0$.