



## VARIABLES A DENSITE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE :

1) On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \exp(-|x|) \ln(1 + e^{|x|}).$$

Montrer que l'intégrale  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$  converge si et seulement si l'intégrale

$$K = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln(1 + e^t) dt \text{ converge.}$$

2) Vérifier que  $\forall t \geq 0, e^{-t} \ln(1 + e^t) = te^{-t} + e^{-t} \ln(1 + e^{-t})$ .

3) Calculer les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \text{ et } D = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(1 + e^{-t}) dt.$$

En déduire la convergence et la valeur de  $J$ .

4) Déterminer le réel  $a$  tel que l'application  $f = ag$  soit une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{1}{4 \ln 2} \exp(-|x|) \ln(1 + e^{|x|}).$$

On note

$$I(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt.$$

5) Montrer que  $I(X)$  converge si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} tg(t) dt$  converge.

6) Montrer que, sous réserve de convergence des intégrales,

$$I(X) = \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_U + \underbrace{\int_0^{+\infty} te^{-t} \ln(1 + e^{-t}) dt}_V.$$

7) Etablir la convergence des intégrales  $U$  et  $V$

8) En déduire que l'espérance  $E(X)$  existe et la calculer.

## INDICATIONS DE SOLUTION

- 1) Penser à la parité de  $g$ .
- 3) Pour  $D$  on trouvera  $2 \ln 2 - 1$  après une intégration par parties. Pour  $K$ , on trouvera  $K = C + D = 2 \ln 2$ .
- 7) Penser aux croissances comparées ou, pour  $U$ , à une loi exponentielle.
- 8) On trouvera  $E(X) = 0$ .