ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est la matrice de terme général $a_{i,j}$, on appelle trace de A le nombre $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{i,i}$. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques et $A_n(R)$ celui des matrices anti-symétriques (c'est-à-dire vérifiant ${}^tA = -A$). On pose enfin $< A, B >= \mathrm{tr}(A^t B)$.

1) Exprimer $< A, B >$ en fonction des coefficients de A et de B et montrer que

$(A, B) \longmapsto < A, B >$ est un produit scalaire sur E. On notera $||.||$ la norme associée.

2) Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

3) On suppose ici $n = 3$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer la distance de M à $S_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\displaystyle\inf_{N \in S_3(\mathbb{R})} ||A - N||$.

4) Soit $H = \{M \in E \;/\; \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et en donner sa dimension.

b) Soit $M \in H$. Calculer $< M, I_n >$ où I_n est la matrice unité de E.

c) Soit J la matrice de E dont tous les termes valent 1. Déterminer $d(J, H)$, distance de J à H.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE