ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

On considére $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B et du produit scalaire canonique associé, que l'on notera $< \ , \ >$. On notera $||.||$ la norme associée. Soit $e=(\alpha,\beta,\gamma)$ un vecteur normé de E. On note D la droite vectorielle engendrée par e.

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et f_a l'application définie sur E par :

$\forall x\in E,\ f_a(x)=x+a<x,e>e.$

1) Vérifier que f_a est un endomorphisme de E.

2) a) Montrer qu'il existe une valeur $b\in\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in E,\ ||f_b(x)||=||x||$

b) Calculer $f_b\circ f_b$ et montrer que $\mathrm{Ker}(f_b+\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(f_b-\mathrm{Id})=E$.

3) On revient au cas général où a est quelconque .

a) Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de E.

b) Déterminer les éléments propres de f_a.

4) On suppose dans cette question que $a\neq -1$ et on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique B. On définit alors sur E l'application h_a par :

$\forall u=(x,y,z)\in E,\ h_a(u)={}^tXM_aX$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Déterminer les extremums de h_a.