



ALGÈBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$. On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$

1) Montrer que, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $L_j(i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(j) = 1$.

Montrer que l'on a $L_j(X) = \frac{(-1)^{n-j}}{n!} \binom{n}{j} \prod_{k=0, k \neq j}^n (X - k)$.

2) Montrer que $B = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de E .

3) Calculer : $L_0 + L_1 + \dots + L_n$ et $L_1 + 2L_2 + \dots + nL_n$.

4) On pose, pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.

a) Montrer que l'on définit sur E un produit scalaire. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

b) Que peut-on dire de B pour ce produit scalaire ?

5) On considère $H = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer un réel λ_k tel que $X^n + \lambda_k L_k \in H$.

6) Soit $P \in H^\perp$. Montrer que les coordonnées de P dans la base B sont

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^n P(j)j^n, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

7) Soit π la projection orthogonale de E sur H .

On pose $d(X^n, H) = \|X^n - \pi(X^n)\|$.

a) Montrer que $\|X^n - \pi(X^n)\| = n! \times \|L_0 - \pi(L_0)\|$.

b) Soit $Q = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} L_i$. Montrer que $Q \in H^\perp$.

c) En déduire que $d(X^n, H) = n! \times \frac{|\langle L_0, Q \rangle|}{\|Q\|}$

d) Démontrer que $d(X^n, H) = \frac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}$