ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$. On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$

1) Montrer que, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $L_j(i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(j) = 1$.

Montrer que l'on a $L_j(X) = \dfrac{(-1)^{n-j}}{n!}\dbinom{n}{j}\displaystyle\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(X-k)$.

2) Montrer que $B = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E.

3) Calculer : $L_0 + L_1 + \cdots + L_n$ et $L_1 + 2L_2 + \cdots + nL_n$.

4) On pose, pour tout $(P, Q) \in E^2, < P, Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

a) Montrer que l'on définit sur E un produit scalaire. On notera $||.||$ la norme associée.

b) Que peut-on dire de B pour ce produit scalaire ?

5) On considère $H = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer un réel λ_k tel que $X^n + \lambda_k L_k \in H$.

6) Soit $P \in H^{\perp}$. Montrer que les coordonnées de P dans la base B sont

$\alpha_k = \dfrac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(j)j^n \ , k \in [\![0, n]\!]$.

7) Soit π la projection orthogonale de E sur H.

On pose $d(X^n, H) = ||X^n - \pi(X^n)||$.

a) Montrer que $||X^n - \pi(X^n)|| = n! \times ||L_0 - \pi(L_0)||$.

b) Soit $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} L_i$. Montrer que $Q \in H^{\perp}$.

c) En déduire que $d(X^n, H) = n! \times \dfrac{|< L_0, Q >|}{||Q||}$

d) Démontrer que $d(X^n, H) = \dfrac{n!}{\sqrt{\dbinom{2n}{n}}}$

