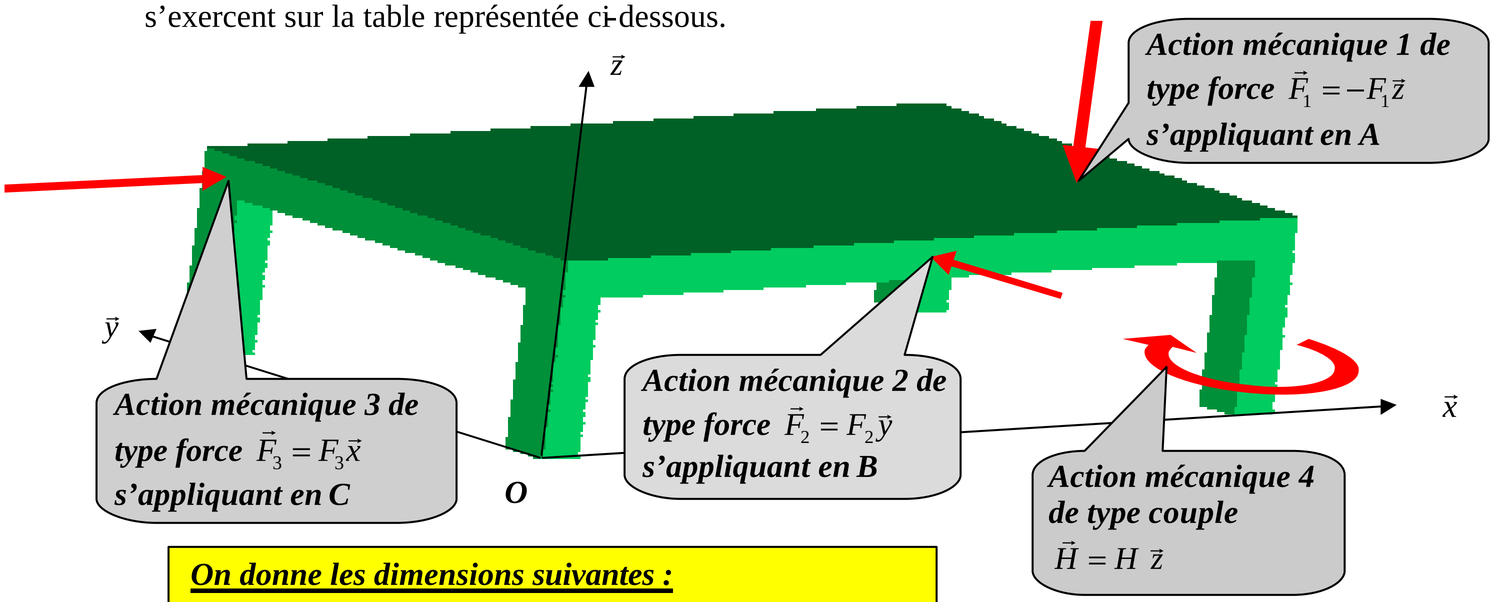
TD N°2 : Actions mécaniques

Exercice 1 : Table

Déterminer sous forme d'un seul torseur ramené en O, l'ensemble des actions mécaniques qui s'exercent sur la table représentée ci-dessous.



On donne les dimensions suivantes :

$\overrightarrow{OA} = a\,\vec{x} + b\,\vec{y} + d\,\vec{z}$; $\overrightarrow{OB} = c\,\vec{x} + d\,\vec{z}$; $\overrightarrow{OC} = p\,\vec{y} + d\,\vec{z}$

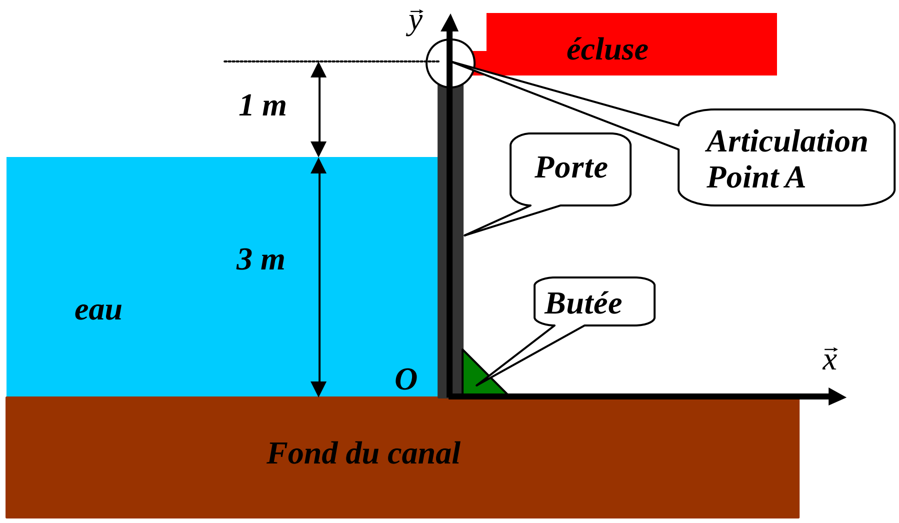
avec d la hauteur de la table.

Questions :

1) Modéliser les quatre actions mécaniques qui agissent sur la table sous forme de torseur (le plus simple possible) en un point de votre choix
2) Modéliser l'ensemble des quatre actions mécaniques en O
3) Déterminer l'axe central du torseur des quatre actions mécaniques qui agissent sur la table ainsi que le point central qui se situe sur le plan de la table.

   On pourra prendre pour alléger les calculs le cas particulier : $\begin{cases} b = p \\ F_1 = F_2 = F_3 \end{cases}$

Exercice 2 : Action mécanique de l'eau sur une porte de bief verticale



Une porte rectangulaire dont la section est montrée ci-contre mesure 4m de haut et 10m de large. Cette porte ferme l'extrémité d'un bief de canal de 3m de profondeur.

On rappel :

$r_{eau} = 1000\ Kg/m^3 \quad g =$

On prendra

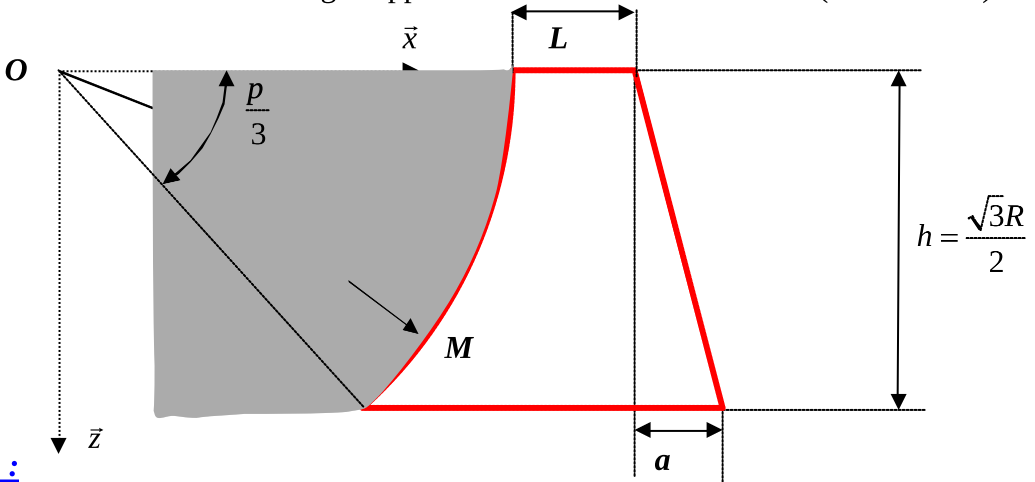
$p(y) = r_{eau}\,g\,(3-y)$

Questions :

1) Déterminer sous forme de torseur en O, l'action mécanique de l'eau sur la porte du bief
2) Déterminer le point B sur la porte du bief où s'applique la résultante des forces de pression, c'est à dire la résultante de l'action mécanique de l'eau sur la porte.

Exercice 3 : Action mécanique de l'eau sur un barrage

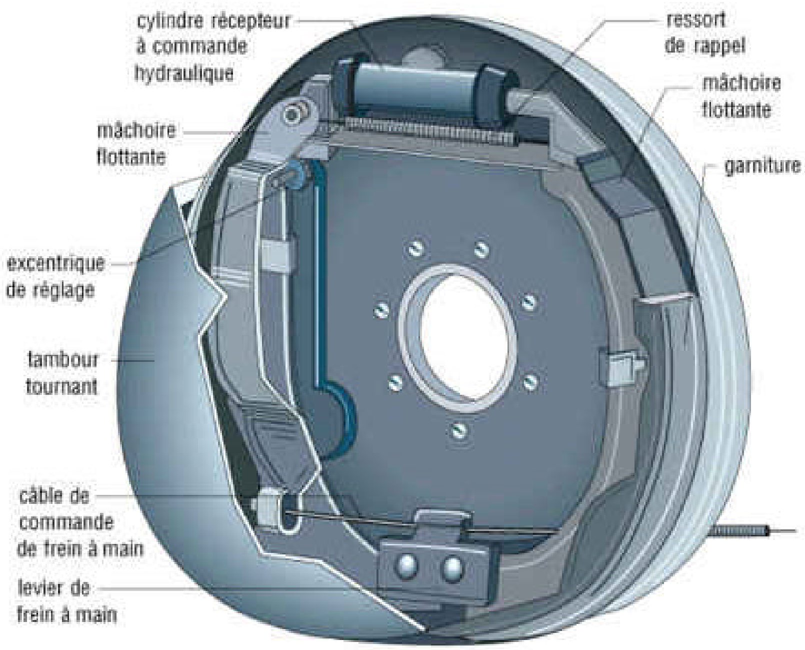
On considère un déversoir homogène (sorte de barrage rempli « à ras bord ») dont la section est représentée ci-dessous. Ce barrage supporte une hauteur d'eau notée h (voir schéma)



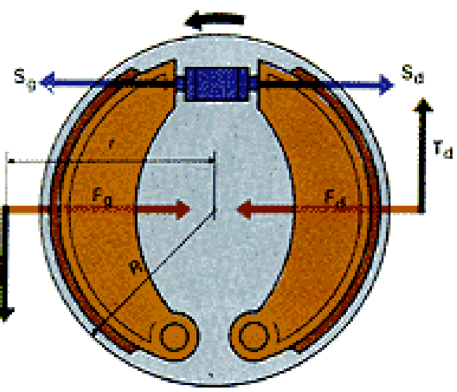
Questions :

1) Déterminer la position du centre de gravité du déversoir (ou barrage) : calculs difficiles
2) Modéliser sous forme d'un torseur réduit en O, l'action mécanique qu'exerce l'eau sur le déversoir (ou barrage) pour une largeur unitaire de 1 mètre. On rappelle que la pression varie avec le profondeur de la façon suivante : $p(z) = r\,gz$ en négligeant la pression atmosphérique et avec ρ la masse volumique de l'eau.
3) Déterminer l'axe central de ce torseur des actions mécaniques qu'exerce l'eau sur le déversoir. Proposer une modélisation globale de cette action mécanique répartie sous forme d'une force (à déterminer), s'appliquant en un point A (à déterminer) de la surface du déversoir (ou barrage)

Exercice 4 : Action mécanique de frottement sur un frein à tambour



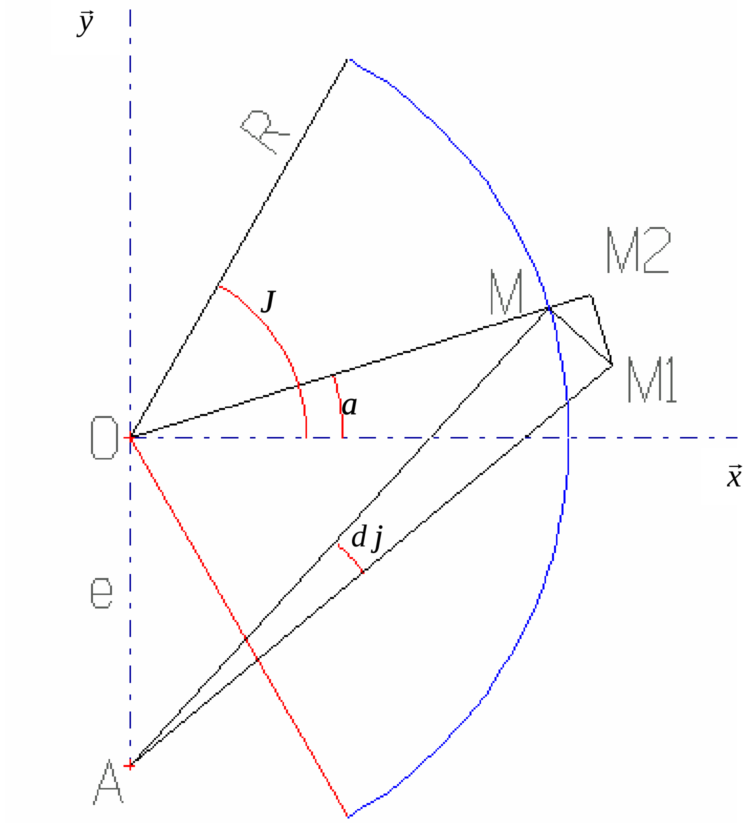
Principe : ***Sous l'effet de l'effort exercé par le piston, les deux mâchoires flottantes avec leurs garnitures se plaquent sur le tambour tournant créant ainsi une force de frottement qui ralenti le tambour et donc le véhicule.***



L'étude a pour objectif de déterminer l'action mécanique globale des deux mâchoires sur le tambour lors de la phase de freinage.

Question 1 : On pourra prendre le résultat pour répondre aux questions suivantes

Modélisation de la répartition de pression exercée par une mâchoire sur le tambour tournant
On admet que la pression est proportionnelle à l'usure radiale de la garniture (soit la longueur MM_2). Or la mâchoire, et donc sa garniture, tourne autour d'un point fixe A.



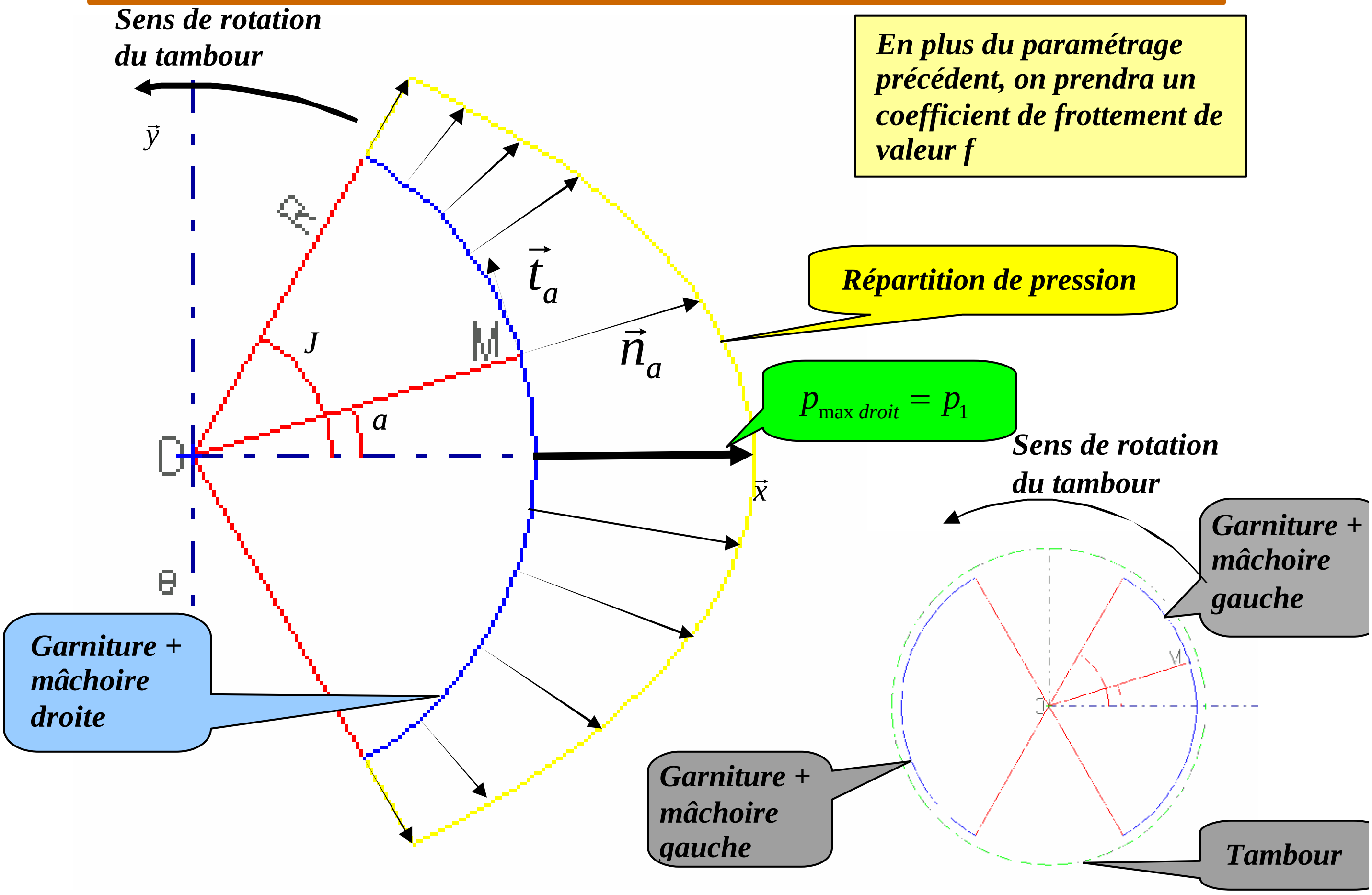
Paramétrage du problème :
La surface frottante entre un ensemble (garniture+mâchoire) et le tambour tournant est modélisée par un arc de cercle de centre O, de rayon R, de secteur angulaire $(-J ; J)$ et de largeur L.
Soit un point M courant de la surface frottante. Lorsque l'ensemble (mâchoire+garniture) tourne d'une quantité infinitésimale (usure) dj autour de son articulation A, le point M se déplace en M_1. Le point M_2 est la projection du segment MM_1 sur la droite OM

- Déterminer la longueur MM_2 en fonction de a et des autres paramètres du problème lorsque l'ensemble (mâchoire+garniture) tourne d'une quantité infinitésimale (usure) dj
- En déduire que la répartition de pression qu'exerce l'ensemble (mâchoire+garniture) sur le tambour tournant est de la forme : $p(a) = p_{\max} \cos a$

Question 2 :

- Déterminer en fonction de $p_{\max\, droit} = p_1$ et du paramétrage le torseur d'action mécanique en O qu'exerce l'ensemble droit (mâchoire+garniture) sur le tambour tournant.
- Déterminer en fonction de $p_{\max\, gauche} = p_2$ et du paramétrage le torseur d'action mécanique en O qu'exerce l'ensemble gauche (mâchoire+garniture) sur le tambour tournant.

On donne la figure paramétrée pour l'ensemble mâchoire + garniture droite :



Question 3 :

En déduire en fonction de $p_{\max\, droit} = p_1$ et $p_{\max\, gauche} = p_2$ ainsi que du paramétrage le torseur d'action mécanique en O qu'exerce l'ensemble des deux mâchoires et des deux garnitures sur le tambour tournant.

En déduire le couple de freinage obtenu par ce frein à tambour. On le notera C_f

TD N°2 : Correction
Actions mécaniques

Exercice 1 : Table

Question 1 :

Les actions mécaniques de type forces sont modélisables par des torseurs à résultantes. On a donc :

$$\{T(\text{action méca}1 \rightarrow \text{table})\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_1 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

$$\{T(\text{action méca } 2 \rightarrow \text{table})\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

$$\{T(\text{action méca } 3 \rightarrow \text{table})\} = {}_C\begin{Bmatrix} F_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

Les actions mécaniques de type couple sont modélisables par des torseurs couple. On a donc :

$$\{T(\text{action méca } 4 \rightarrow \text{table})\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

Question 2 :

Il suffit de recalculer les moments en O des actions mécaniques 1, 2 et 3 puisque l'action mécanique 4 étant de type couple, sa forme mathématique est identique en tout point de l'espace.

- $\vec{M}_O(1 \rightarrow table) = \vec{M}_A(1 \rightarrow table) + \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F}_1) = \vec{0} + \begin{vmatrix} a \\ b \\ d \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -bF_1 \\ aF_1 \\ 0 \end{vmatrix}$, on peut donc réécrire le torseur de l'action mécanique 1 sur la table en O :

$$\{T(\text{action méca}1 \rightarrow \text{table})\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & -bF_1 \\ 0 & aF_1 \\ -F_1 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

- $\vec{M}_O(2 \rightarrow table) = \vec{M}_B(2 \rightarrow table) + \overrightarrow{OB} \wedge (\vec{F}_2) = \vec{0} + \begin{vmatrix} c \\ 0 \\ d \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -dF_2 \\ 0 \\ cF_2 \end{vmatrix}$, on peut donc réécrire le torseur de l'action mécanique 2 sur la table en O :

$$\{T(\text{action méca } 2 \rightarrow \text{table})\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & -dF_2 \\ F_2 & 0 \\ 0 & cF_2 \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

- $\vec{M}_O(3\rightarrow table)=\vec{M}_C(3\rightarrow table)+\overrightarrow{OC}\wedge(\vec{F}_3)=\vec{0}+\begin{vmatrix}0\\p\\d\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}F_3\\0\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\dF_3\\-pF_3\end{vmatrix}$, on peut donc

réécrire le torseur de l'action mécanique 3 sur la table en O :

$$\{T(\text{action méca }3\rightarrow\text{table})\}=\left\{\begin{matrix}F_3 & 0\\0 & dF_3\\0 & -pF_3\end{matrix}\right\}_{O\,(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

- $$\{T(\text{action méca }4\rightarrow\text{table})\}=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & H\end{matrix}\right\}_{O\,(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

Question 3 :

L'ensemble de ces quatre actions mécaniques est donc modélisable par un seul torseur en O, tel que :

$${}_O\{T(1+2+3+4\rightarrow\text{table})\}={}_O\{T(1\rightarrow\text{table})\}+{}_O\{T(2\rightarrow\text{table})\}+{}_O\{T(3\rightarrow\text{table})\}+{}_O\{T(4\rightarrow\text{table})\}$$

Soit : $$\{T(1+2+3+4\rightarrow\text{table})\}=\left\{\begin{matrix}F_3 & -dF_2-bF_1\\F_2 & dF_3+aF_1\\-F_1 & H-pF_3+cF_2\end{matrix}\right\}_O$$

L'axe central a donc comme ***vecteur directeur la résultante du torseur*** ci-dessus, c'est à dire $\vec{u}=F_3\,\vec{x}+F_2\,\vec{y}-F_1\,\vec{z}$. Un point de cet axe central, c'est à dire un point central, est le point P tel que $\vec{M}_P(1+2+3+4\rightarrow table)=l\,\vec{R}(1+2+3+4\rightarrow table)$. Puisque l'on nous le demande, on va chercher P sur la table, c'est à dire avec $\overrightarrow{OP}=x\vec{x}+y\vec{y}+d\vec{z}$

$\vec{M}_P(1+2+3+4\rightarrow table)=\vec{0}=\vec{M}_O(1+2+3+4\rightarrow table)+\overrightarrow{PO}\wedge\vec{R}(1+2+3+4\rightarrow table)$, ce qui donne l'équation suivante à résoudre pour trouver les coordonnées x et y sur la table :

$$\begin{vmatrix}l\,F_3\\l\,F_2\\-l\,F_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-dF_2-bF_1\\dF_3+aF_1\\H-pF_3+cF_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-x\\-y\\-d\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}F_3\\F_2\\-F_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-dF_2-bF_1+yF_1+dF_2\\dF_3+aF_1-dF_3-xF_1\\H-pF_3+cF_2+xF_2+yF_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(y-b)F_1\\(a-x)F_1\\H-pF_3+cF_2+xF_2+yF_3\end{vmatrix}$$

On obtient donc trois équations :

$$\left\{\begin{matrix}l\,F_3=(y-b)F_1\\l\,F_2=(a-x)F_1\\-l\,F_1=H+(y-p)F_3+(x+c)F_2\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y=\dfrac{l\,F_3}{F_1}+b\\x=a-\dfrac{l\,F_2}{F_1}\\-l\,F_1=H+\left(\dfrac{l\,F_3}{F_1}+b-p\right)F_3+\left(a-\dfrac{l\,F_2}{F_1}+c\right)F_2\end{matrix}\right.$$

De la troisième équation on tire l :

$l=\dfrac{F_1}{(F_2^2-F_1^2-F_3^2)}\left[H+(b-p)F_3+(a+c)F_2\right]$, d'où les coordonnées littérales :