STATIQUE DES SOLIDES

MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

1 Modélisation mathématique

1.1 Définition

On appelle **action mécanique** toute cause susceptible :

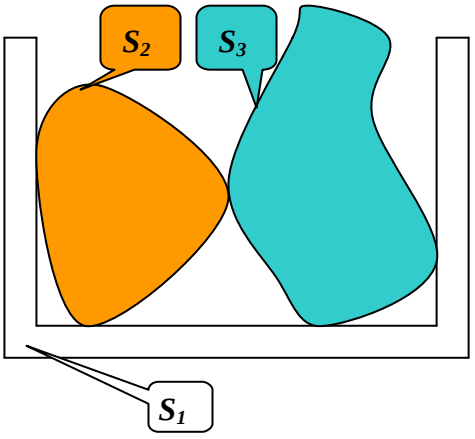
- de maintenir un corps au repos.
- de créer un mouvement.
- de déformer un corps.

1.2 Classification

On distingue deux types d'actions mécaniques :

- ***actions mécaniques à distance*** (champ de pesanteur ; champs électromagnétique ; ...)
- ***actions mécaniques de contact*** (liaisons entre solides ; ...)
  Dès que deux solides S_1 et S_2 sont en contact ; S_1 exerce sur S_2 une action mécanique dite de contact.

Notion d'action mécanique **intérieure** ou **extérieure** :
Soient 3 corps S_1 ; S_2 et S_3 en contact de la façon ci-contre:
S_1 est en contact avec S_2 et avec S_3
S_2 est en contact avec S_1 et avec S_3



Si l'on sépare l'espace E en deux de la façon suivante :
$E = E_1 \cup \overline{E}_1$ avec $E_1 = S_2 \cup S_3$
Alors : S_2 et S_3 appartiennent à E_1, et S_1 appartient à l'extérieur de E_1 que l'on a noté $\overline{E}_1$.

Définitions :

- L'action mécanique de S_1 sur S_2 est dite : extérieure à E_1 (car entre un élément de E_1 et un élément de $\overline{E}_1$)
- L'action mécanique de S_3 sur S_1 est dite : intérieure à E_1 (car entre deux éléments de E_1)

1.1 Premier principe de la statique

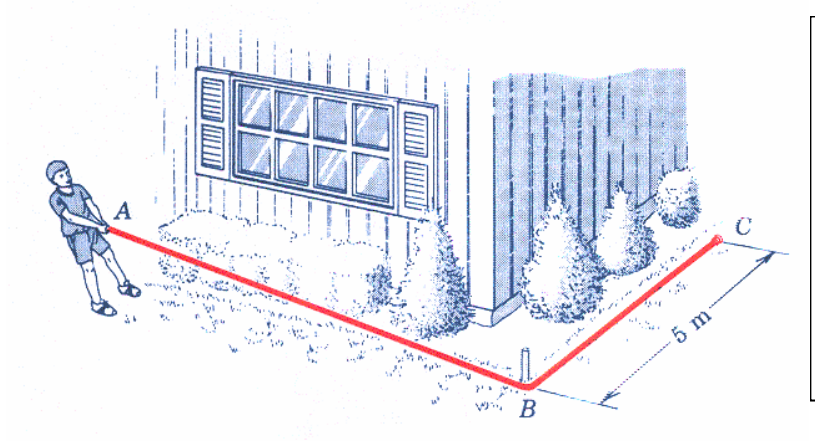
1.3.1 Force

Certaines actions mécaniques peuvent être modélisée par un vecteur lié :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

Exemple : Tuyau d'arrosage



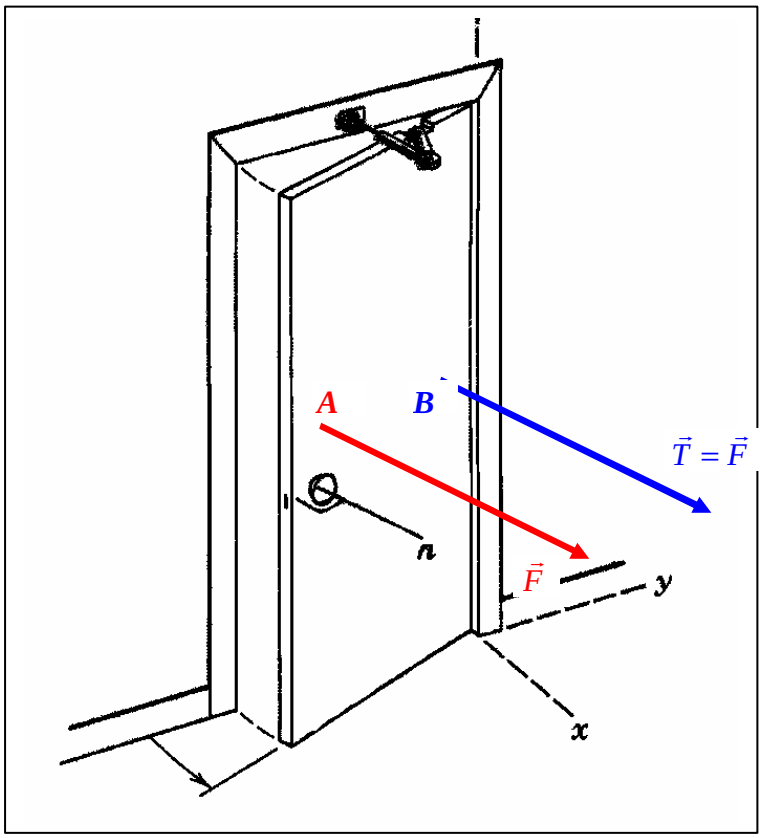
Dans ce cas l'action mécanique du jardinier sur le tuyau d'arrosage peut être représentée par un ***vecteur lié :***

- De direction, la direction de $\vec{F}$:(AB)
- De sens, le sens de $\vec{F}$:de B vers A
- D'intensité : la norme du vecteur $\vec{F}$
- De point d'application A
- On note ce ***vecteur lié :*** $(\vec{F};A)$

Définition : ***Une force est une action mécanique représentée par un vecteur lié.***

1.3.2 Moments

Exemple : Ouverture de Porte



Un opérateur noté OP_1 exerce une force perpendiculairement à la porte en A :$(\vec{F};A)$

Un deuxième opérateur noté OP_2 exerce une force perpendiculairement à la porte en B : $(\vec{T};B)$

Expérience : A au bord de la porte et B tout près de l'axe de rotation.

$$\vec{F} = \vec{T}$$

On remarque que l'action mécanique de l'opérateur 1 qui tire en A fait touner la porte alors que l'action de l'opérateur 2 qui tire en B ne la fait pas tourner.

Conclusion : Il manque une quantité pour caractériser les actions mécaniques des deux opérateurs qui tirent de la même façon mais en des points différents : A pour le premier et B pour le second. Cette quantité est la notion de ***moment*** qui dépend à la fois du vecteur et de son point d'application. Si on note OP_1 pour désigner l'opérateur qui tire en A, OP_2 pour désigner l'opérateur qui tire en B ; on représente les actions mécaniques de OP_1 et OP_2 sur la porte par les quantités suivantes :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

- Lorsque l'opérateur 1 tire en A , on modélise l'action mécanique de $(OP_1 \to porte)$ par les deux quantités suivantes : $\forall X \in \text{espace} \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(OP_1 \to porte) = \vec{F} \\ \underbrace{\vec{M}_X(OP_1 \to porte) = \overrightarrow{XA} \wedge \vec{F}}_{\text{moment en X de l'action mécanique de : } OP_1 \to porte} \end{array} \right.$
- Lorsque l'opérateur 1 tire en B , on modélise l'action mécanique de $(OP_2 \to porte)$ par les deux quantités suivantes : $\forall X \in \text{espace} \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(OP_2 \to porte) = \vec{F} \\ \underbrace{\vec{M}_X(OP_2 \to porte) = \overrightarrow{XB} \wedge \vec{F}}_{\text{moment en X de l'action mécanique de : } OP_2 \to porte} \end{array} \right.$

Torseur d'action mécanique :

Soit C un autre point quelconque de l'espace ; le moment résultant en C de l'action mécanique de $(OP_1 \to porte)$ si l'opérateur tire en A s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{M}_C(OP_1 \to porte) &= \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F} \\ &= \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}(OP_1 \to porte) \\ &= \left[\overrightarrow{CX} + \overrightarrow{XA}\right] \wedge \vec{R}(OP_1 \to porte) \\ &= \underbrace{\overrightarrow{XA} \wedge \vec{R}(OP_1 \to porte)}_{\vec{M}_X(OP_1 \to porte)} + \overrightarrow{CX} \wedge \vec{R}(OP_1 \to porte) \\ &= \vec{M}_X(OP_1 \to porte) + \overrightarrow{CX} \wedge \underbrace{\vec{R}(OP_1 \to porte)}_{\vec{F}} \\ &= \vec{M}_X(OP_1 \to porte) + \overrightarrow{CX} \wedge \vec{F} \end{aligned}$$

On retrouve donc la structure de torseur.

Premier Principe de la statique : $OP_1 \to porte$

Toute action mécanique est entièrement caractérisée d'un point de vue mécanique par un torseur appelé torseur d'action mécanique, ici de l'opérateur 1 sur la porte, dont :

La résultante est un vecteur force : $\vec{R}(OP_1 \to porte) = \vec{F}$

Le moment résultant est le vecteur noté : $\vec{M}_C(OP_1 \to porte) = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}(OP_1 \to porte)$

On le note : $\{T(OP_1 \to porte)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(OP_1 \to porte) = \vec{F} \\ \vec{M}_C(OP_1 \to porte) = \overrightarrow{CA} \wedge \underbrace{\vec{R}(OP_1 \to porte)}_{\vec{F}} \end{array} \right\}_C$

Torseur particulier :

- ***Couple :*** L'action mécanique de (E) sur (S) est un couple si le torseur des actions mécaniques de (E) sur (S) est de la forme : $\{T(E \to S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(E \to S) = \vec{0} \\ \vec{M}_C(E \to S) = \overrightarrow{\text{constante}} \end{array} \right\}_C, \forall C \in \text{espace}$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

- ***Force :*** Si l'action mécanique de (E) sur (S) est une ***force*** s'exerçant en un point A : $\left(\vec{F};A\right)$, alors le torseur d'action mécanique de (E) sur (S) est ***un glisseur*** de la forme :

$$\left\{T\left(E\to S\right)\right\}=\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}\vec{R}\left(E\to S\right)=\vec{F}\\ \vec{M}_C\left(E\to S\right)=\overrightarrow{CA}\wedge\vec{F}\end{matrix}\right\}\\ C\end{matrix}=\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}\vec{R}\left(E\to S\right)=\vec{F}\\ \vec{M}_A\left(E\to S\right)=\vec{0}\end{matrix}\right\}\\ A\end{matrix}$$

2 Modélisation des actions mécaniques à distance

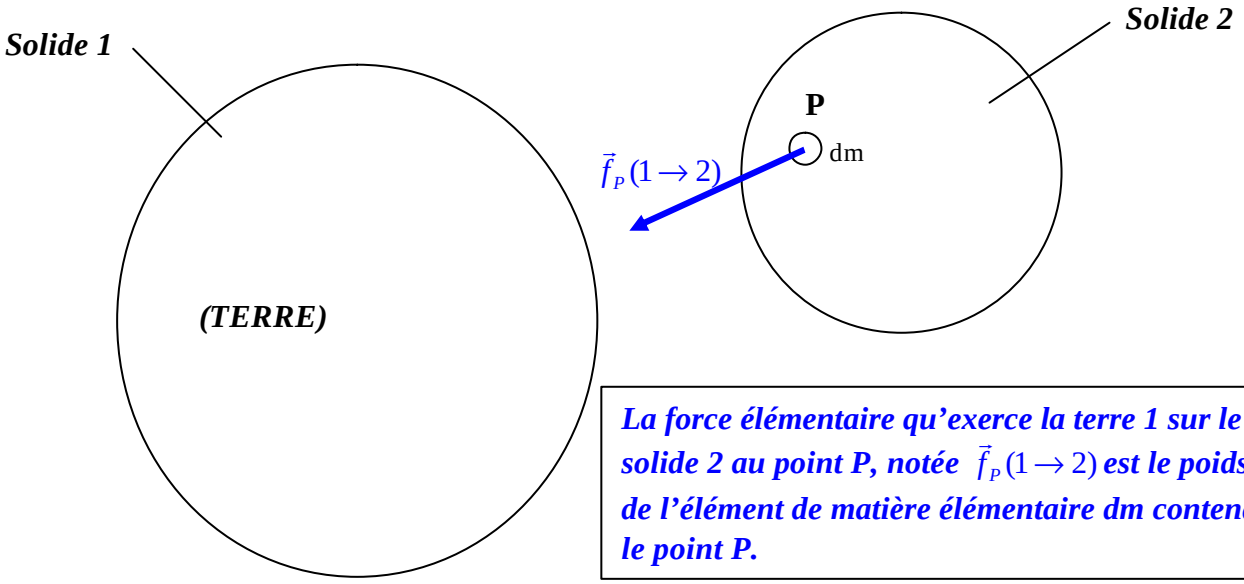
2.1 Champ de pesanteur

Cette action mécanique à distance est la seule action mécanique à distance que l'on abordera, elle conserne tous les mécanismes fonctionnant sur terre même si, dans certains cas, elle sera négligée devant d'autres beaucoup plus importante.

Profitons de cette action mécanique pour étendre la notion de force :

Modélisation locale de l'action mécanique de pesanteur :

La force qui est une modélisation globale est en fait la somme de toutes les actions mécaniques locales qui agissent sur une surface de contact dans le cas de contact entre solides ou sur un volume dans le cas de la pesanteur.
Nous allons donc partir du modèle d'actions mécaniques locales pour en déduire une modélisation globale.



La force élémentaire qu'exerce la terre 1 sur le solide 2 au point P, notée $\vec{f}_P(1\to 2)$ ***est le poids de l'élément de matière élémentaire dm contenant le point P.***

Pour un solide 2 uniforme, si on note r sa masse volumique et $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur (que l'on supposera constant sur tout le volume du solide 2) alors l'élément de matière élémentaire dm est égal à $r\ dV$ avec dV le volume élémentaire de matière correspondant.
Dans ce cas (modèle très représentatif de la réalité pour les mécanismes évoluant sur terre), la force élémentaire au point P, appelée densité volumique de force de pesanteur s'écrit :
$\vec{f}\left(1\to 2\right)=r\ \vec{g}\ dV$, on trouve aussi couramment la notation : $\vec{f}\left(1\to 2\right)=\vec{f}\left(\vec{g}\to 2\right)=r\ \vec{g}\ dV$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

Modélisation globale de l'action mécanique de pesanteur :

Il suffit de « sommer » toutes les actions mécaniques locales. Dans le cas d'un volume, cette somme revient à intégrer toutes les actions mécaniques locales de pesanteur sur le volume du solide.

Torseur des actions mécaniques de pesanteur de la terre 1 sur le solide 2

Ce torseur s'écrit en un point A quelconque de l'espace :

$$\{T(1\to 2)\}=\{T(\vec{g}\to 2)\}=\left\{\begin{array}{l}\vec{R}(\vec{g}\to 2)\\ \vec{M}_A(\vec{g}\to 2)\end{array}\right\}_A=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\forall P\in 2}\vec{f}_P(\vec{g}\to 2)\\ \displaystyle\int_{\forall P\in 2}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}_P(\vec{g}\to 2)\end{array}\right\}_A$$

Cette relation est celle relative à n'importe quelle densité volumique de force.

Appliquons la désormais au champ de pesanteur :

$$\{T(\vec{g}\to 2)\}=\left\{\begin{array}{l}\vec{R}(\vec{g}\to 2)=\displaystyle\int_{\forall P\in 2}\vec{f}_P(\vec{g}\to 2)=\int_{\forall P\in 2}\vec{g}dm=m\vec{g}\\ \vec{M}_A(\vec{g}\to 2)=\displaystyle\int_{\forall P\in 2}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}_P(\vec{g}\to 2)=\int_{\forall P\in 2}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{g}dm=\left[\int_{\forall P\in 2}\overrightarrow{AP}dm\right]\wedge\vec{g}\end{array}\right\}_A$$

La résultante et le moment de ce torseur sont perpendiculaires, ce qui signifie que ce torseur est à résultante. L'action mécanique de pesanteur est donc modélisable par une force. Il reste donc à déterminer son axe central. Pour cela on va montrer que le centre d'inertie du solide 2 noté G est un point central.

Rappel : ***Le centre d'inertie G du solide 2 est le point qui vérifie la relation :***

$\overrightarrow{OG}=\displaystyle\int_{\forall P\in 2}\overrightarrow{OP}dm$ ***ou bien encore*** : $\vec{0}=\displaystyle\int_{\forall P\in 2}\overrightarrow{GP}dm$

Il est donc évident en regardant les relations que $\vec{M}_G(\vec{g}\to 2)=\vec{0}$

Le torseur d'action mécanique de pesanteur s'écrit donc très simplement au point G de la façon suivante : $\{T(\vec{g}\to 2)\}=\left\{\begin{array}{l}\vec{R}(\vec{g}\to 2)=m\vec{g}\\ \vec{M}_G(\vec{g}\to 2)=\vec{0}\end{array}\right\}_G$

Remarque : Le plus compliqué étant bien souvent de déterminer la position du centre d'inertie G du solide considéré

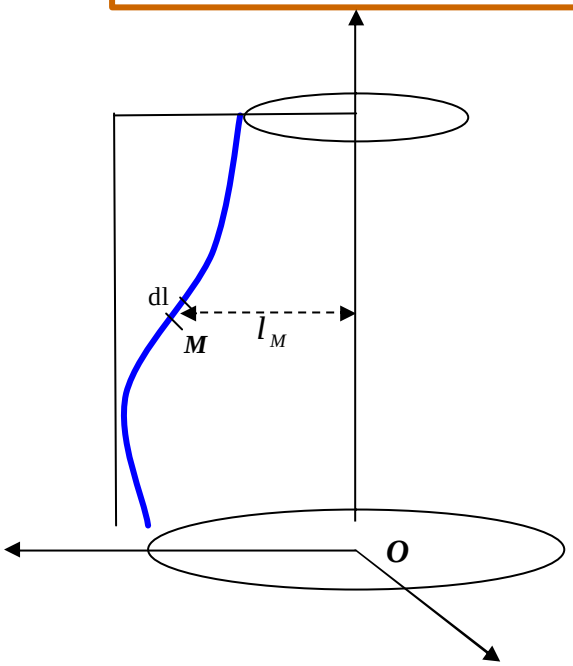
2.1 Théorèmes de GULDIN

2.1.2 Premier théorème de GULDIN : centre d'inertie d'une courbe plane

Enoncé : ***L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe contenu dans son plan est égale à sa longueur multipliée par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie lors de la rotation autour de l'axe.***

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.



Démonstration :

Soit M un point courant de la courbe de longueur L.
Soit dl l'élément élémentaire de la courbe autour de M.
Soit l_M la distance de M à l'axe autour duquel on fait tourner cette courbe.
Soit G le centre d'inertie de la courbe

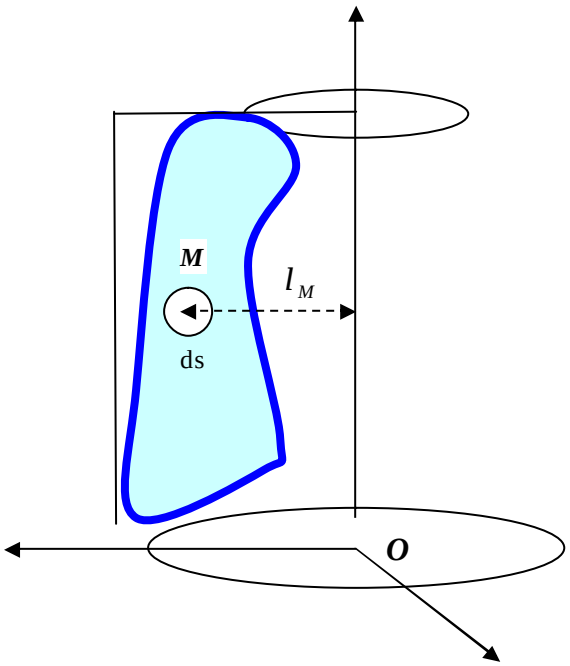
Comme $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{L} \int_{\forall M \in courbe} \overrightarrow{OM} dl$, on a

$l_G = \frac{1}{L} \int_{\forall M \in courbe} l_M dl$ avec l_G distance de G à l'axe de rotation.

Or S surface engendrée par la courbe en tournant autour de l'axe vaut : $\boxed{S = \int_{\forall M \in courbe} 2p l_M dl = L(2p l_G)}$

2.1.2 Second théorème de GULDIN : centre d'inertie d'une surface plane

Enoncé : ***Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe contenu dans son plan est égale à son aire multipliée par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie lors de la rotation autour de l'axe.***



Démonstration :

Soit M un point courant de la surface d'aire S.
Soit ds la surface élémentaire autour de M.
Soit l_M la distance de M à l'axe autour duquel on fait tourner cette surface.
Soit G le centre d'inertie de la courbe

Comme $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \int_{\forall M \in surface} \overrightarrow{OM} ds$, on a

$l_G = \frac{1}{S} \int_{\forall M \in surface} l_M dl$ avec l_G distance de G à l'axe de rotation.

Or V volume engendré par la surface en tournant autour de l'axe vaut : $\boxed{V = \int_{\forall M \in surface} 2p l_M ds = S(2p l_G)}$

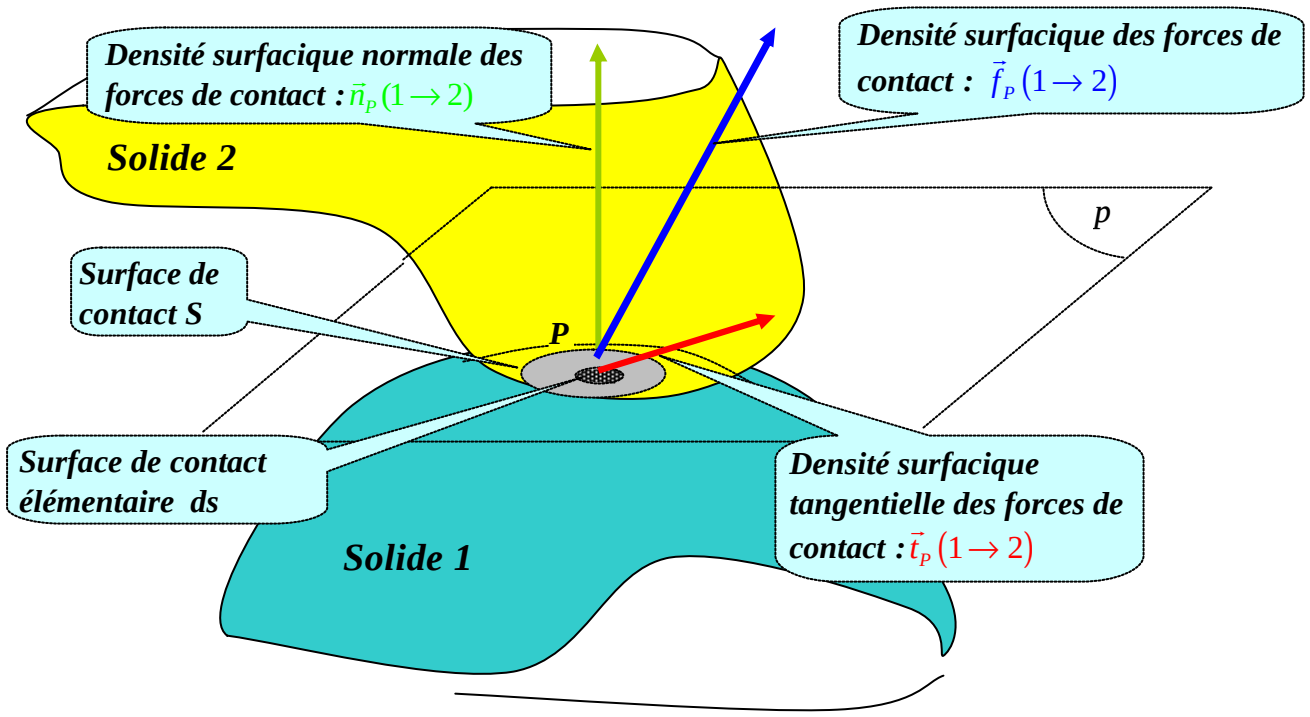
3 Modélisation des actions mécaniques de contact

3.1 Modélisation locale : torseur d'actions mécaniques locales

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

Tout contact réel entre 2 solides S_1 et S_2 a lieu sur une surface même infinitésimale : (S)
L'action mécanique de S_1 sur S_2 est caractérisée par une densité surfacique de forces (homogène à une pression qui dépend dans le cas le plus général du point P où on la considère.
On admet l'existence en P d'un plan tangent commun au deux surfaces en contact que l'on note p



Définitions :

- $\vec{f}_P(1\to 2)$ est la ***densité surfacique en P des forces de contact de S_1 sur S_2***.
- $\vec{n}_P(1\to 2)$ est la ***densité surfacique normale en P des forces de contact de S_1 sur S_2***.
  C'est la composante de $\vec{f}_P(1\to 2)$ sur la normale au plan tangent commun$p$.
  Si on note $\vec{n}$ un des deux vecteurs normaux unitaires au plan tangent commun$p$, on a
  $\vec{n}_P(1\to 2)=\left[\vec{f}_P(1\to 2).\vec{n}\right]\vec{n}$
- $\vec{t}_P(1\to 2)$ est la ***densité surfacique tangentielle en P des forces de contact de S_1 sur S_2***. C'est la composante de $\vec{f}_P(1\to 2)$ sur le plan tangent commun$p$. On a la relation
  $\vec{t}_P(1\to 2)=\vec{f}_P(1\to 2)-\vec{n}_P(1\to 2)$

3.2 Modélisation globale

Il suffit de sommer toutes les actions mécaniques locales sur la totalité de la surface de contact (S) :
$\vec{f}_P(1\to 2)$ est la ***densité surfacique en P des forces de contact de S_1 sur S_2*** qui s'exerce sur la surface élémentaire ds, donc l'action mécanique élémentaire qui s'exerce en P est le glisseur ou la force $\vec{f}_P(1\to 2)\,ds$.

Son moment en un point A quelconque est le moment élémentaire : $\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}_P(1\to 2)\,ds$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.