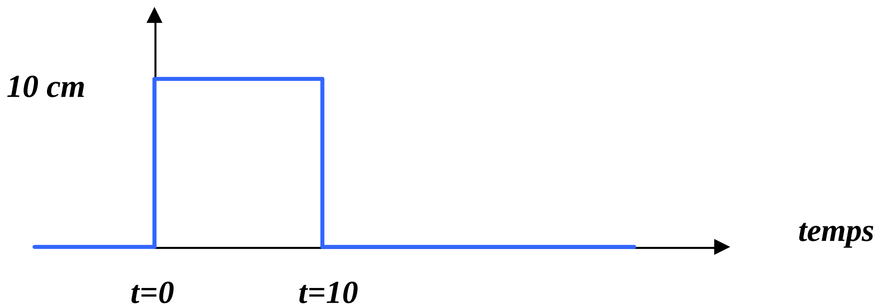
TD N°1 : Réponse à des entrées composées

On se propose d'étudier le comportement d'un vérin électrique en réponse à différentes entrées composées de rampe et d'échelon.

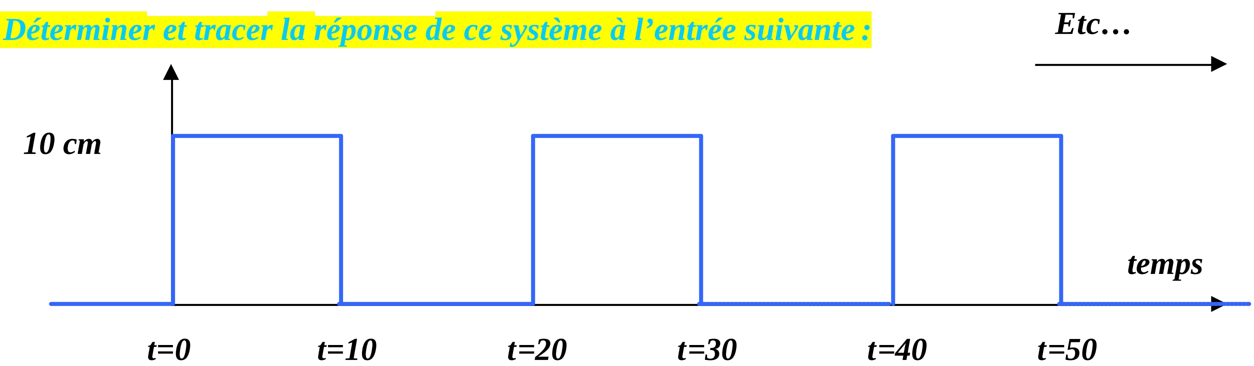
Le vérin électrique étudié est assimilé par soucis de simplification des calculs à un système du premier ordre de fonction de transfert global : $H(p) = \frac{1}{1+p}$, c'est à dire de gain unitaire et de constante de temps $t = 1\ s$

Questions :

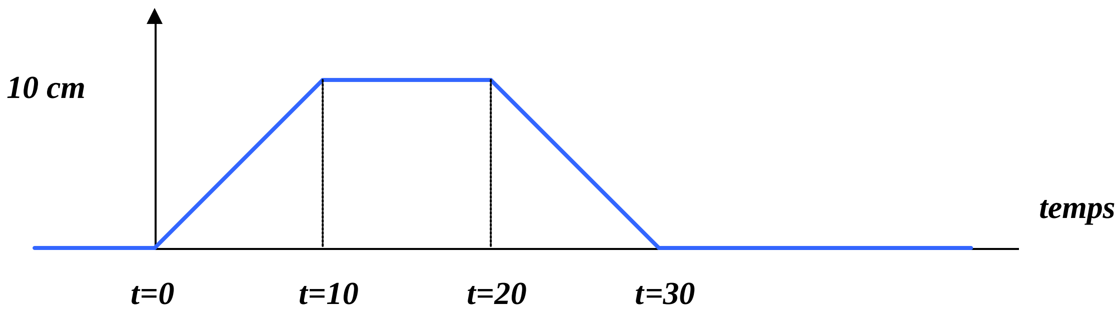
1. *Déterminer et tracer la réponse de ce système à l'entrée créneau suivante :*



2. *Déterminer et tracer la réponse de ce système à l'entrée suivante :*



3. *Déterminer et tracer la réponse de ce système à l'entrée trapèze suivante :*



TD N°1 : Réponse à des entrées composées CORRECTION

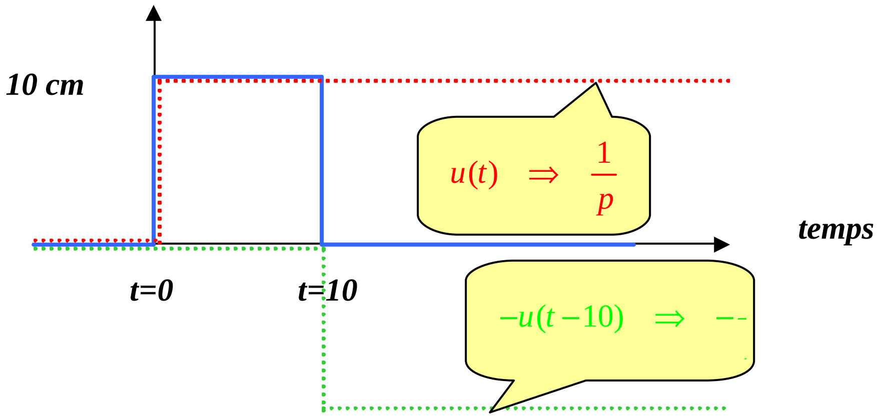
Question 1

Commençons par déterminer la réponse du système en p.

$S(p) = H(p)E(p) = \dfrac{1}{1+p}E(p)$, on doit donc déterminer la transformée de Laplace de l'entrée à laquelle est soumis le système.

Pour cela on va construire l'entrée comme somme de fonctions usuelles (dont on connaît les transformées de Laplace), retardées ou pas. On doit donc rappeler la transformées de Laplace d'une fonction avec retard t : $L[f(t-t)] = L[f(t)]e^{-(t\,p)} = F(p)e^{-(t\,p)}$

La fonction **d'entrée bleu** est la somme de **l'échelon rouge** et de **l'échelon vert** :



On en déduit donc que $e(t) = u(t) - u(t-10)$ soit dans le domaine fréquentiel (en p) :

$E(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}e^{-10p} = \dfrac{1}{p}\left(1 - e^{-10p}\right)$, d'où la réponse dans le domaine de Laplace :

$S(p) = \dfrac{1}{p(1+p)}\left(1 - e^{-10p}\right)$. La seule décomposition en éléments simples à effectuer est donc celle de : $\dfrac{1}{p(1+p)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{1+p}$. On peut donc présenter la solution dans le domaine fréquentiel sous la forme « inversable par Laplace » :

$S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{1+p} - \dfrac{1}{p}e^{-10p} + \dfrac{1}{1+p}e^{-10p}$. D'où la solution dans le domaine temporel :

$s(t) = u(t) - e^{-t}u(t) - u(t-10) + u(t-10)e^{-(t-10)}$, soit après factorisation :

$s(t) = \underbrace{\left(1 - e^{-t}\right)u(t)}_{\text{Réponseà l'échelon rouge}} - \underbrace{\left(1 - e^{-(t-10)}\right)u(t-10)}_{\text{Réponseà l'échelon vert retardéde10s}}$ On peut définir cette fonction réponse par morceaux puisque u(t-10)=0 jusqu'à t=10 s.

$$\begin{cases} s(t) = 1 - e^{-t} & \text{pour} \quad 0 \le t \le 10 \\ s(t) = e^{-(t-10)} - e^{-t} & \text{pour} \quad 10 \le t \le \infty \end{cases}$$