SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

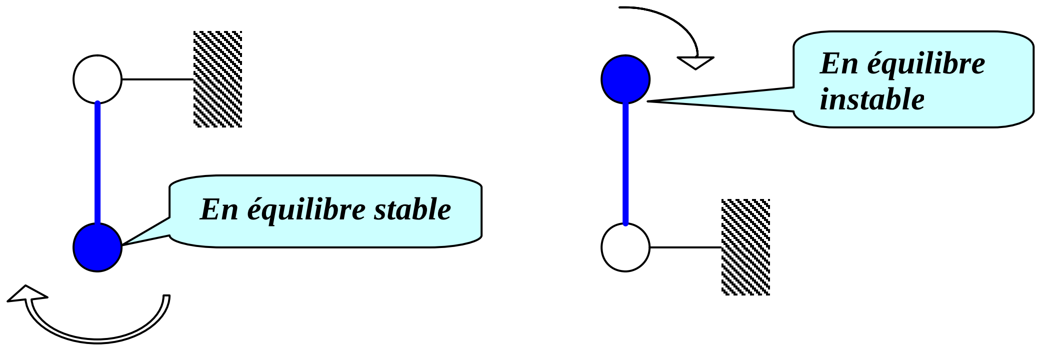
PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS

1 Stabilité des systèmes asservis

1.1 Notion de stabilité

La stabilité est communément reconnue comme étant associée à la notion d'équilibre :

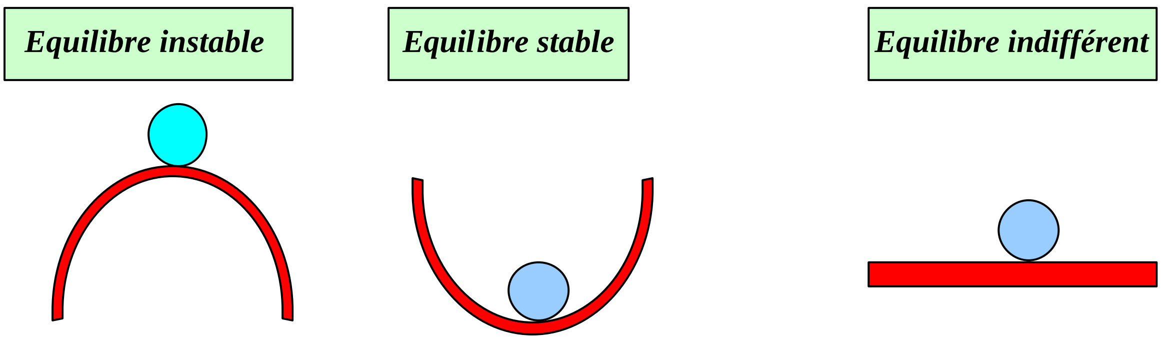
Prenons les deux positions d'équilibre d'un pendule :

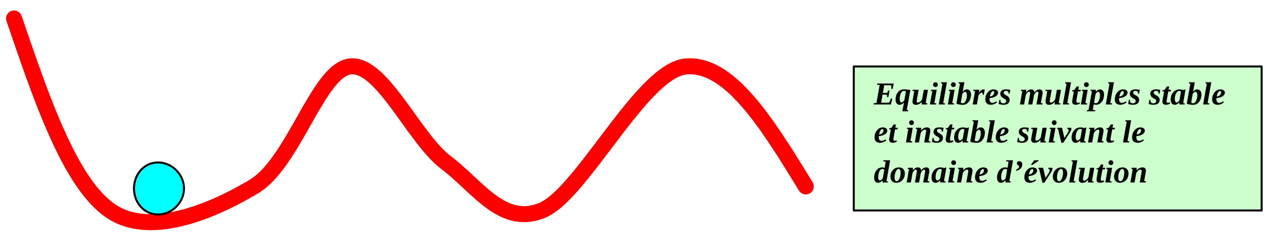


A gauche si on écarte le pendule de sa position d'équilibre, il finira par la reprendre.
A droite, si on écarte le pendule de sa position d'équilibre, il s'en écarte définitivement.

On peut élargir cette notion :

Etudions le mouvement d'une bille reposant sur différentes formes.





Il faut donc étudier la qualité de la stabilité d'un système asservis de façon plus précise.

Emmanuel FARGES

1.2 Aspect mathématique

Un système est stable si à toute entrée bornée, le système répond par une sortie bornée
Un système est stable si sa réponse libre (équation différentielle sans second membre) tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini.

On a vu que toute fonction de transfert et donc en particulier la fonction de transfert globale d'un système pouvait se mettre après décomposition en éléments simples sous la forme :

$H(p) = \sum_i \frac{c_i}{p - p_i}$ $avec\ p_i \in \mathbb{C}$ les pôles de la fonctions de transfert globale du système.

Or après transformée inverse de Laplace, on s'aperçoit que :

- Les pôles nuls engendrent des solutions de la forme t^n (non borné)
- Les pôles réels engendrent des solutions de la forme $e^{\left(p_i t\right)}$ $\left(borné\ si\ p_i < 0\right)$
- Les pôles complexes qui sont nécessairement conjugués engendrent des solutions de la forme : $e^{\left(\mathrm{Re}\left(p_i\right)t\right)} \sin\left(w_i t + j_i\right)$ $\left(borné\ si\ \mathrm{Re}\left(p_i\right) < 0\right)$

La condition générale de stabilité est donc que les pôles de la fonction de transfert globale du système soient à partie réelle strictement négative.

Ce critère est une condition de stabilité mais ne permet pas de quantifier la qualité de cette éventuelle stabilité, ce que nous ferons plus tard.

1.3 Critère algébrique de ROUTH

Ce critère algébrique permet de savoir si un système est stable ou non sans en déterminer la qualité. Il permet de savoir si les zéros d'un polynôme sont à parties réelles négatives ou non.
Pour la stabilité on s'intéresse aux pôles de la fonction de transfert, donc aux zéros du polynôme au dénominateur : $D(p)\ avec\ H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

Posons : $D(p) = b_n p^n + \ldots\ldots.. + b_1 p + b_0$

Les zéros de D(p) donc les pôles de la fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives si deux conditions :

Condition 1 : ***Tous les coefficients b_i sont positifs.***

Condition 2 : ***Tous les coefficients de la première colonne du tableau ci-dessous doivent être positif.***

Le tableau se constitue de la façon suivante :

Les deux premières lignes se remplissent avec les coefficients du polynôme D(p).
Les lignes suivantes se déduisent des deux immédiatement précédentes, de la façon suivante :

p^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}
p^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}
P^{n-2}	$c=\dfrac{b_{n-1}b_{n-2}-b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}$	$d=\dfrac{b_{n-1}b_{n-4}-b_n b_{n-5}}{b_{n-1}}$	etc
	$\dfrac{cb_{n-3}-db_{n-1}}{c}$	…	…
$p^1=p$	…	…	…
$p^0=1$	…		…

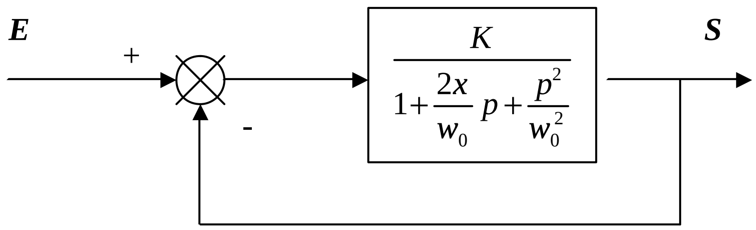
1ère colonne

Remarque : si les coefficients n'existent pas, on y met des zéros et on ne va pas plus loin.

Remarque : Si un zéro apparaît dans la première colonne, on ne peut plus calculer les autres lignes. On s'intéresse donc aux zéros du polynôme (p+a)D(p) qui a les mêmes zéros que D(p) avec –a en plus. Donc si a>0, cela ne change rien a la stabilité de notre système et cela nous permet d'effectuer les calculs (en général on prend a=1).

1.4 Application à un deuxième ordre

On prend un système représenté par un deuxième ordre à retour unitaire dont le schéma bloc est donné ci-dessous :



$$FTBF=\frac{\dfrac{K}{1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0^2}}}{1+\dfrac{K}{1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0^2}}}=\frac{K_{BF}}{1+\dfrac{2x_{BF}}{w_{0BF}}p+\dfrac{p^2}{w_{0BF}^2}}$$

avec $K_{BF}=\dfrac{K}{1+K}$ $\qquad x_{BF}=\dfrac{x}{\sqrt{1+K}}$ $\qquad w_{0BF}=w_0\sqrt{1+K}$

Pôles de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

Si $x_{BF}<1$ les pôles sont : $-x_{BF}w_{0BF}\pm jw_{0BF}\sqrt{1-x_{BF}^2}$ $\quad \mathrm{Re}<0$

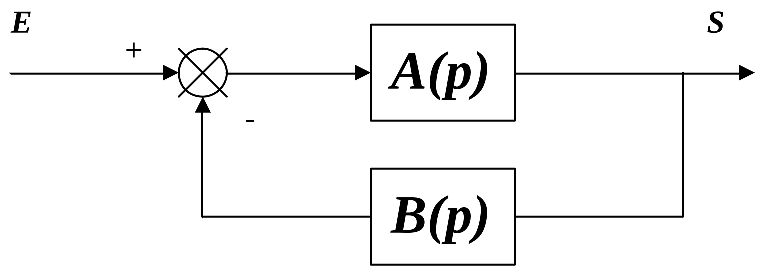
Si $x_{BF}>1$ les pôles sont : $-x_{BF}w_{0BF}\pm w_{0BF}\sqrt{x_{BF}^2-1}$ $\quad <0$

Conclusion : Un deuxième ordre est toujours stable (encore une fois sans notion de qualité de cette stabilité)

1.5 Stabilité des systèmes bouclés

On va chercher à quantifier la qualité de cette stabilité en définissant des marges vis-à-vis de la stabilité limite.

On considère le système bouclé classique :



$FTBO = A(p)B(p)$ et $FTBF = \dfrac{A(p)}{1+A(p)B(p)} = \dfrac{A(p)}{1+FTBO}$

Faire l'étude de la stabilité de ce système revient à faire l'étude des solutions du polynôme : $1+FTBO=0$ soit $FTBO=-1$

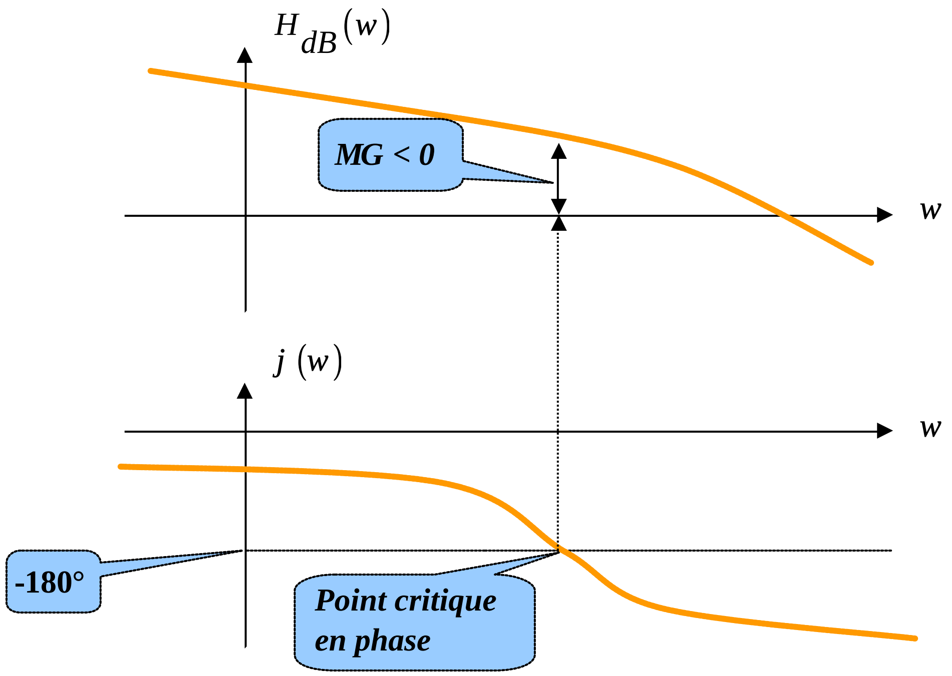
Donc l'étude de la stabilité se fait dans ce cas sur la FTBO

Le point -1 est appelé point critique

Condition pratique de stabilité : Le but est de s'écarter le plus possible du point critique pour lequel : $-1 = e^{(-j\pi)}$. Soit $\begin{cases} H_{dB} = 0dB \\ \varphi = -180° \end{cases}$

Marge de Gain :Valeur courante :10dB

On lit la marge de gain sur les diagrammes de Bode de la ***FTBO***



On se place au point critique sur le diagramme de phase $\varphi(\omega) = -180°$ et on lit la marge de gain sur le diagramme de gain.
La marge de gain est l'écart entre 0dB et le gain au point critique en phase.

- ***Si on amplifie au point critique, le système est instable : MG<0.***
- ***Si on atténue au point critique , le système est stable avec une marge MG>0***