



# SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

## ANALYSE FREQUENTIELLE

### 3 Système du deuxième ordre.

#### 3.1 Définition d'un système du deuxième ordre

Un système du second ordre a son comportement régi par une équation différentielle du deuxième ordre de la forme :

$$\frac{1}{w_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2x}{w_0} \frac{ds}{dt} + s = Ke$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e = e(t) \text{ entrée du système} \\ s = s(t) \text{ réponse du système à l'entrée } e(t) \\ K: \text{ gain statique } (>0) \\ x: \text{ coefficient d'amortissement (sans dimension) } (>0) \\ w_0 \text{ pulsation propre du système (en } \text{rads}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$$

#### 3.2 Fonction de transfert globale d'un deuxième ordre

On applique la transformée de Laplace à l'ensemble de l'équation différentielle ci-dessus, avec des conditions initiales nulles :

Donc :

$$\frac{1}{w_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2x}{w_0} \frac{ds}{dt} + s = Ke \quad \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} \quad \frac{p^2}{w_0^2} S(p) + \frac{2x}{w_0} pS(p) + S(p) = KE(p)$$

On peut alors présenter le rapport de la sortie S(p) sur l'entrée E(p), c'est à dire la fonction de transfert globale du système :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2x}{w_0} p + \frac{p^2}{w_0^2}}$$

On notera :

- Le gain statique vaut :  $K=H(0)$
- Pour identifier les caractéristiques d'un système du deuxième ordre (c'est à dire  $K$ ,  $x$  et  $w_0$ ), on veillera bien à présenter la fonction de transfert globale  $H(p)$  avec le coefficient en  $p^0$  du polynôme au dénominateur égal à 1. Ainsi le numérateur peut être identifié au gain statique  $K$ , coefficient en  $p^2$  du polynôme au dénominateur peut être identifié à l'inverse de la pulsation propre  $w_0$  et on déduit l'amortissement du coefficient en  $p^1$  :  $\frac{2x}{w_0}$ .

## 3.3 Gain et phase réels d'un deuxième ordre

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2x}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j \frac{2x\omega}{\omega_0}}$$

Calcul du gain :

$$\|H(j\omega)\| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}}} \text{ soit en dB : } \|H(j\omega)\|_{dB} = 20\text{Log} \|H(j\omega)\|$$

$$\|H(j\omega)\|_{dB} = 20\text{Log}K - 20\text{Log} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Existence d'une résonance :

Il existe une résonance si il existe une pulsation  $\omega_r$ , dite pulsation de résonance pour laquelle

le gain  $\|H(j\omega)\|_{dB} = 20\text{Log}K - 20\text{Log} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}}$  présente un maximum.

Le gain est maximum si la fonction de  $\omega$  :  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}$  est minimale :

Etude de cette fonction : Posons  $x = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ , alors la fonction :  $f(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}$  est

minimale si la fonction :  $g(x) = (1-x)^2 + 4x^2x = 1 + (4x^2 - 2)x + x^2$  est minimale .

$g'(x) = 4x^2 - 2 + 2x$ , donc on a un extremum pour  $x$  telque  $g'(x) = 0$ , c'est à dire pour  $x = 1 - 2x^2$ .

Donc la pulsation pour laquelle on a résonance est :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2x^2}$

Remarque : On voit donc bien que la résonance ne peut exister que dans certains cas d'amortissement (terme sous la racine positif).

**On a résonance pour des valeurs d'amortissement :  $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$**

Quantification de la résonance : facteur de surtension Q

Le facteur de surtension exprimé en dB est la différence entre la valeur du pic de résonance et

le gain statique :  $Q_{dB} = \|H(j\omega_r)\|_{dB} - 20\text{Log}K$

$$Q_{dB} = \|H(j\omega_r)\|_{dB} - 20\text{Log}K = -20\text{Log} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega_r^2}{\omega_0^2}}$$

$$Q_{dB} = -20\text{Log} \sqrt{\left(1 - (1 - 2x^2)\right)^2 + 4x^2(1 - 2x^2)}$$

$$Q_{dB} = -20\text{Log} \sqrt{4x^4 + 4x^2 - 8x^4} = -20\text{Log} \sqrt{4x^2 - 4x^4} = -20\text{Log} \left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$$

D'où le résultat final :  $Q_{dB} = 20 \text{Log} \frac{1}{(2x\sqrt{1-x^2})}$  Or Q est tel que  $Q_{dB} = 20 \text{Log} Q$ , donc :

$$Q = \frac{1}{(2x\sqrt{1-x^2})}$$

Calcul de la phase :

$$j(\omega) = \text{Arg}[H(j\omega)]$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j \frac{2x\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right], \text{ donc :}$$

$$j(\omega) = \text{Arg}[H(j\omega)] = \text{Arg} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right]$$

$$\tan j = \frac{\text{Im} \left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right)}{\text{Re} \left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right)}; \cos j = \frac{\text{Re} \left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right)}{\left\| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right\|}; \sin j = \frac{\text{Im} \left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right)}{\left\| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{2x\omega}{\omega_0} \right\|}$$

Donc :  $\tan j = \frac{-\frac{2x\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}; \cos j = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}}}; \sin j = \frac{-\frac{2x\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}}}$

$$j(\omega) = -\arctan \left[ \frac{\frac{2x\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \right]$$

**3.4 Asymptotes des diagrammes de Bode**

Deux méthodes sont possibles pour déterminer les asymptotes des diagrammes de Bode : Soit on détermine les équivalents en 0 et en  $+\infty$  du gain réel et de la phase réelle, soit on cherche des équivalents directement sur la fonction de transfert.

1<sup>ère</sup> méthode : équivalents à partir des fonctions de gain et de phase réels.

Asymptote sur le diagramme de gain :

$$\|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \text{Log} K - 20 \text{Log} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4x^2\omega^2}{\omega_0^2}}$$

est la fonction du gain (en dB) réelle