SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

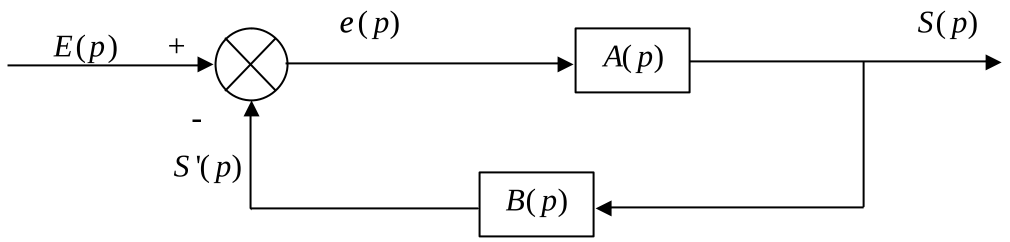
ANALYSE FREQUENTIELLE (Partie 1 & 2)

L'étude détaillée se limite aux systèmes de bases, c'est à dire aux systèmes du premier ordre et du second ordre. En effet l'étude des autres systèmes se construit à partir des résultats issus des premiers et seconds ordres.

1 Généralités - Rappels

1.1 Fonctions de transfert

Considérons le schéma bloc d'un asservissement :



Définition des fonctions sur le schéma bloc usuel :

$E(p)$ est l'entrée du système ou encore la consigne donnée au système.

$S(p)$ est la sortie du système ou encore la réponse système.

$S'(p)$ est l'image de la sortie.

$e(p)$ est l'erreur (ou écart) constatée entre l'entrée $E(p)$ et l'image de la sortie $S'(p)$.

Définition de la FTBF et de la FTBO :

- Fonction de Transfert en Boucle Fermée (abrégé sous la forme FTBF) :

$$FTBF = H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

- Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (abrégé sous la forme FTBO) :

$$FTBO = \frac{S'(p)}{e(p)}$$

Calcul de la FTBF et de la FTBO dans le cas de la boucle d'asservissement classique représentée ci-dessus :

$$FTBO = \frac{S'(p)}{e(p)} = A(p)B(p)$$

$$\begin{aligned} S(p) &= A(p)e(p) \\ &= A(p)\left[E(p) - S'(p)\right] \\ &= A(p)\left[E(p) - B(p)\,S(p)\right] \end{aligned}$$

$$S(p)\left[1 + A(p)B(p)\right] = A(p)E(p)$$

Soit la fonction de transfert en boucle fermée : $FTBF = H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$ $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$

Ce qui peut encore se présenter sous la forme : $FTBF = H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + FTBO}$

Chaque fonction de transfert étant un rapport polynomial, peut donc s'écrire :

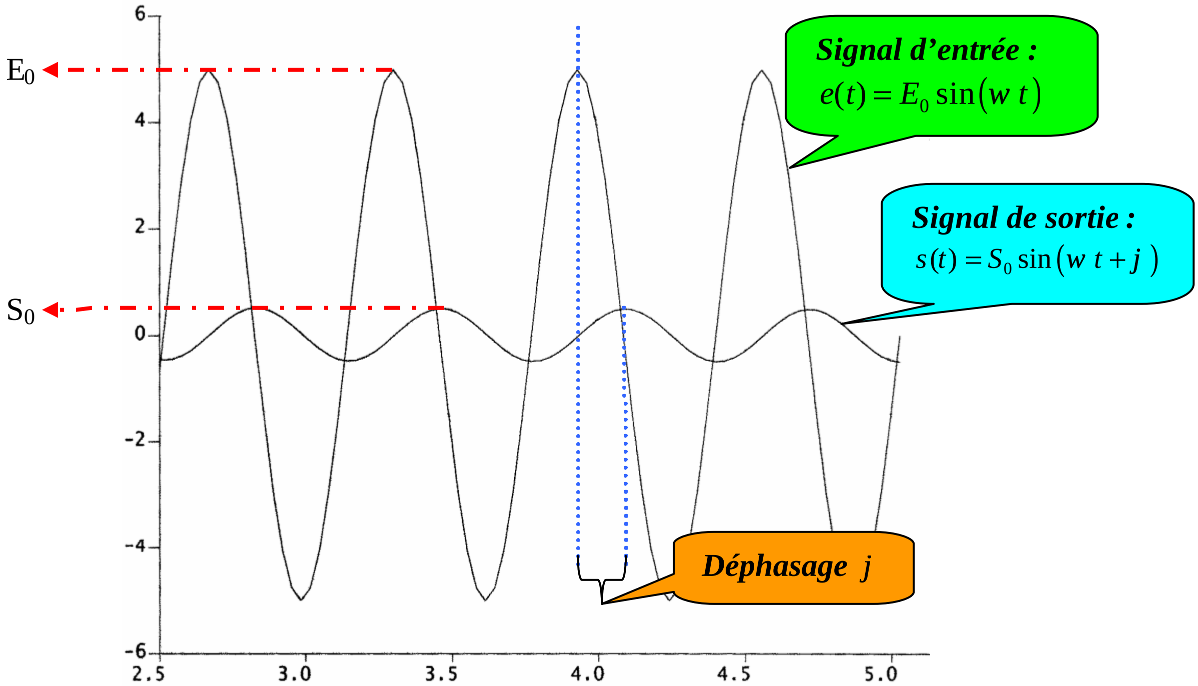
$$H(p) = \frac{K}{p^a}\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{p}{p_j}\right)} \text{ où : } \begin{cases} a : \text{classe du système} \\ K : \text{gain statique du système} \\ n : \text{ordre du système} \\ p_j : \text{(zéros du dénominateur) poles de la fonction de transfert} \\ z_i : \text{(zéros du numérateur) zéros de la fonction de transfert} \end{cases}$$

1.3 Analyse fréquentielle

1.3.1 Réponse harmonique

On étudie la réponse du système soumis à une entrée harmonique, c'est à dire sinusoïdale : $e(t) = E_0 \sin(w\,t)$.

On démontre qu'une des caractéristiques des systèmes linéaires continus invariants est qu'ils présentent une réponse en régime établi (solution particulière de l'équation différentielle) de la même forme que l'entrée, c'est à dire sinusoïdale mais déphasée et d'amplitude différente : $s(t) = S_0 \sin(w\,t + j)$



On étudie alors le rapport d'amplitude sortie sur entrée $\frac{S_0}{E_0}$ et le déphasage j en fonction de la pulsation du signal d'entrée w.

On montre que le rapport des amplitudes est égal au module de la fonction de transfert avec $p = jw$ et que le déphasage est égal à l'argument de la fonction de transfert avec $p = jw$.

Conclusion : **L'étude fréquentielle d'un système de fonction de transfert $H(p)$ consiste donc à éffectuer $p = jw$ dans l'expression de la fonction de transfert et à étudier le complexe $H(jw)$ souvent par son module (alors exprimé en décibels : $\|H(jw)\|_{dB} = 20Log\|H(jw)\|$) et son argument ($j(w) = Arg[H(jw)]$) ou bien par sa partie réelle et sa partie imaginaire.**

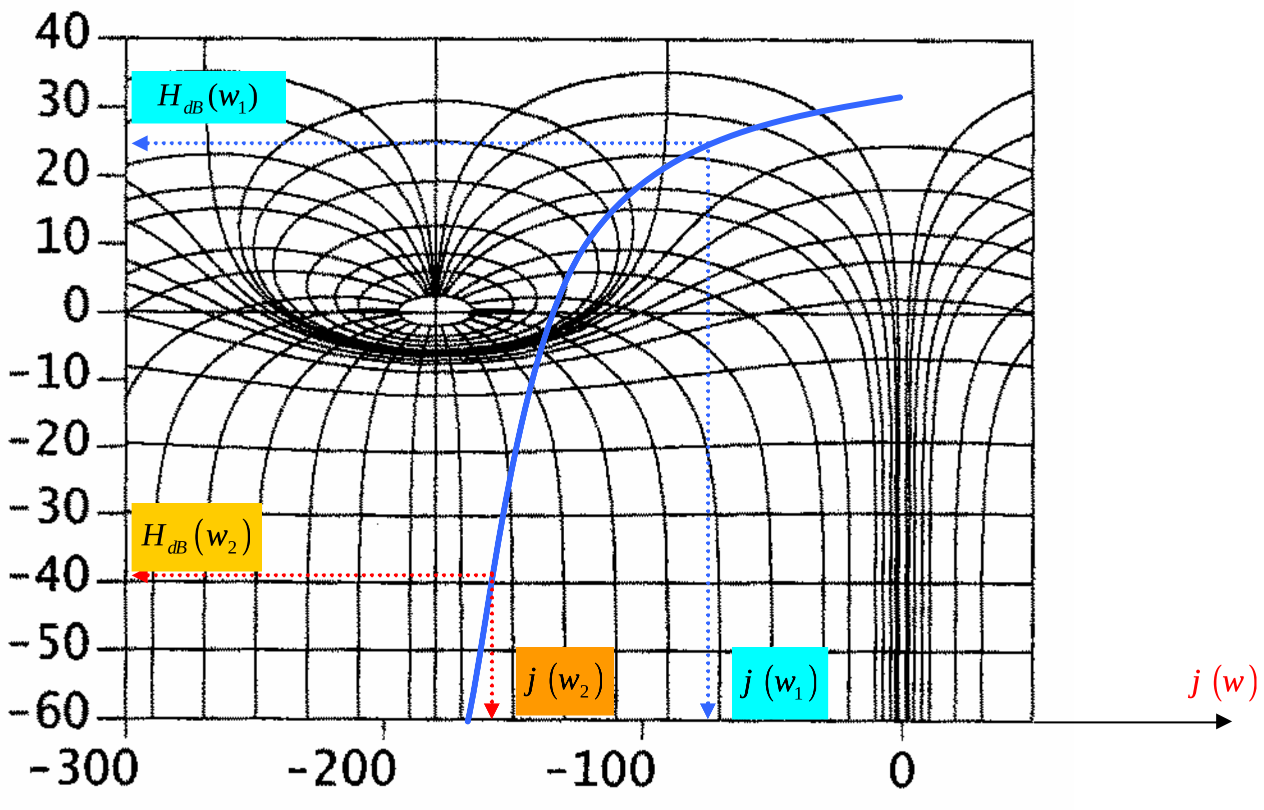
1.3.2 Représentation fonctionnelle

Représentation dans le plan de Black : Diagramme de Black :

On représente le gain exprimé en décibels en fonction de la phase en degré pour une même pulsation w. On obtient donc une courbe paramétrée par w.

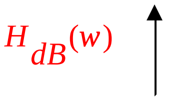
Cette représentation est très utilisée pour concevoir la correction d'un système. Elle est aussi assez souvent rencontrée dans les sujets de SI en Classe Préparatoire aux Grandes Ecoles.

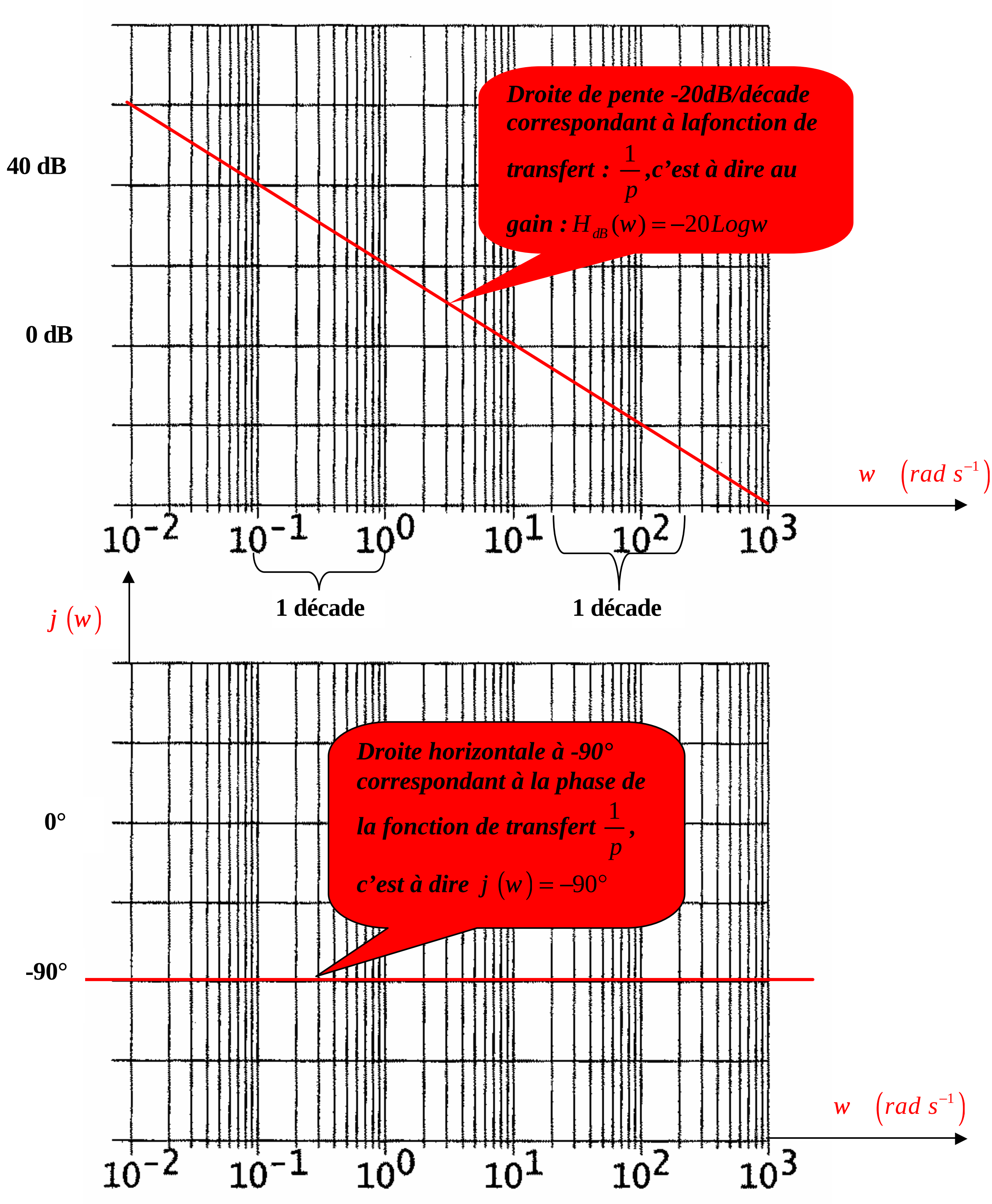
$$\|H(jw)\|_{dB} = H_{dB}(w)$$



Représentation dans le plan de Bode : Diagrammes de Bode

On représente le gain du système en fonction de la pulsation w sur une courbe avec une échelle logarithmique en abscisse (voir exemple ci-dessous).
On représente la phase du système en fonction de la pulsation w sur une autre courbe avec toujours l'échelle logarithmique pour les pulsations w (voir exemple ci-dessous).





Représentation dans le plan de Nyquist:

On trace la courbe paramétrée par la pulsation w avec en abscisse, la partie réelle du complexe $H(jw)$ et en ordonnée la partie imaginaire du complexe $H(jw)$.