SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

ANALYSE TEMPORELLE (Partie 2)

2 Système du deuxième ordre.

2.1 Définition d'un système du deuxième ordre

Un système du second ordre a son comportement régi par une équation différentielle du deuxième ordre de la forme :

$$\frac{1}{w_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2x}{w_0}\frac{ds}{dt}+s=Ke \quad \begin{cases} e=e(t) \quad \text{entrée du système} \\ s=s(t) \quad \text{réponse du système à l'entrée e(t)} \\ \text{K: gain statique (>0)} \\ x \text{ : coefficient d'amortissement (sans dimension) (>0)} \\ w_0 \quad \text{pulsation propre du système (en rad s}^{-1}\text{)} \end{cases}$$

2.2 Fonction de transfert globale d'un deuxième ordre

On applique la transformée de Laplace à l'ensemble de l'équation différentielle ci-dessus, avec des conditions initiales nulles :

Donc :

$$\frac{1}{w_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2x}{w_0}\frac{ds}{dt}+s=Ke \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} \frac{p^2}{w_0^2}S(p)+\frac{2x}{w_0}pS(p)+S(p)=KE(p)$$

On peut alors présenter le rapport de la sortie S(p) sur l'entrée E(p), c'est à dire la fonction de transfert globale du système : $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{K}{1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0{}^2}}$

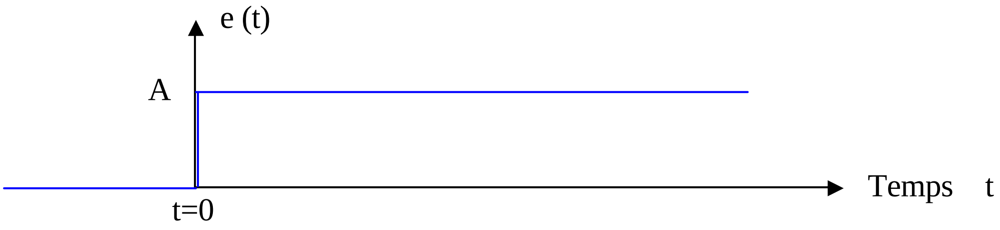
On notera :

- Le gain statique vaut : K=H(0)
- Pour identifier les caractéristiques d'un système du deuxième ordre (c'est à dire K, x et w_0), on veillera bien à présenter la fonction de transfert globale H(p) avec le coefficient en p^0 du polynôme au dénominateur égal à 1. Ainsi le numérateur peut être identifié au gain statique K, coefficient en p^2 du polynôme au dénominateur peut être identifié à la pulsation propre w_0 et on déduit l'amortissement du coefficient en p^1 : $\dfrac{2x}{w_0}$.

2.3 Réponse à un échelon (réponse dite indicielle)

2.3.1 Réponse dans le domaine fréquentielle

On soumet le système à une entrée échelon de taille A. L'entrée est donc la fonction du temps : **e(t)= A u(t)**.



e(t)=A u(t) donc $E(p)=\dfrac{A}{p}$ or $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{K}{1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0{}^2}} \Rightarrow S(p)=\dfrac{K\,A}{p\left[1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0{}^2}\right]}$

On obtient donc très rapidement la solution (réponse à une entrée) dans le domaine fréquentielle (solution en p).
Le problème est qu'il faut désormais effectuer la décomposition en éléments simples.
La décomposition en éléments simples dépend des racines du dénominateur :
$p\left[1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0{}^2}\right]$ qui admet 0 comme racine et pour le polynôme du second degré, on a soit deux racines réelles (discriminant >0) soit deux racines complexes conjuguées (discriminant <0).
On va donc procéder à une première décomposition en éléments simples, puis on discutera de la valeur des racines du polynôme du second degré pour poursuivre la décomposition.

2.3.2 Première décomposition en éléments simples

La première décomposition en éléments simples revient à chercher dans notre cas particulier à mettre S(p) sous la forme :

$$S(p)=\frac{K\,A}{p\left[1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0{}^2}\right]}=\frac{KAw_0{}^2}{p\left[p^2+2xw_0p+w_0{}^2\right]}=KA\left[\frac{a}{p}+\frac{bp+c}{p^2+2xw_0p+w_0{}^2}\right]$$

avec a, b et c trois coefficients à déterminer.
Employons désormais la méthode la plus rapide pour déterminer les coefficients :

$$KAa=\underbrace{pS(p)}_{\text{pour p=0}}=\underbrace{\frac{KA}{1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0{}^2}}}_{\text{pourp=0}}=KA\Rightarrow a=1$$

Ensuite on identifie :

$$\frac{w_0{}^2}{p\left[p^2+2xw_0p+w_0{}^2\right]}=\frac{1}{p}+\frac{bp+c}{p^2+2xw_0p+w_0{}^2}=\frac{p^2+2xw_0p+w_0{}^2+bp^2+cp}{p\left[p^2+2xw_0p+w_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{p^2(b+1)+(2xw_0+c)p+w_0{}^2}{p\left[p^2+2xw_0p+w_0{}^2\right]}$$

On trouve donc le système :

$\begin{cases} b+1=0 \\ 2xw_0+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-2xw_0 \end{cases}$, on obtient donc une première décomposition en éléments simples :

$$S(p) = KA\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2xw_0}{p^2+2xw_0 p + w_0{}^2}\right]$$

2.3.3 Seconde décomposition en éléments simples

La suite de la décomposition dépend du signe du discriminant de $p^2 + 2xw_0 p + w_0{}^2$

$\Delta = 4x^2 w_0{}^2 - 4w_0{}^2 = 4w_0{}^2(x^2-1)$

Donc trois cas se présente à nous

$$\begin{cases} x > 1 \quad \text{systèmetrèsamorti:2racinesréelles} \\ x = 1 \quad \text{caslimite:1racinedouble} \\ x < 1 \quad \text{systèmefaiblementamorti:2racinescomplexesconjuguées} \end{cases}$$

2.3.3.1 Deuxième ordre fortement amorti

On a donc $x > 1$, $p^2 + 2xw_0 p + w_0{}^2$ admet donc deux racines réelles :

$\begin{cases} l_1 = -xw_0 + w_0\sqrt{x^2-1} \\ l_2 = -xw_0 - w_0\sqrt{x^2-1} \end{cases}$, on remarque d'ailleurs que ces deux racines sont négatives (donc le système est stable) et homogène à des s^{-1}.

On poursuit donc la décomposition en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = KA\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2xw_0}{p^2+2xw_0 p + w_0{}^2}\right] = KA\left[\frac{1}{p} + \frac{a}{p + xw_0 - w_0\sqrt{x^2-1}} + \frac{b}{p + xw_0 + w_0\sqrt{x^2-1}}\right]$$

Par identification on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} -(p+2xw_0) &= a(p + xw_0 + w_0\sqrt{x^2-1}) + b(p + xw_0 - w_0\sqrt{x^2-1}) \\ &= (a+b)p + xw_0(a+b) + w_0\sqrt{x^2-1}(a-b) \end{aligned}$$

C'est à dire le système :

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ xw_0(b+a) + (a-b)w_0\sqrt{x^2-1} = -2xw_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ (a-b)\sqrt{x^2-1} = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1-b \\ 1 + 2b = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{x - \sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}} \\ a = -\dfrac{x + \sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

On trouve donc la décomposition en éléments simples dans le cas d'un système fortement amorti :

$$S(p) = KA\left[\frac{1}{p} - \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \big/ 2\sqrt{x^2-1}}{p + xw_0 - w_0\sqrt{x^2-1}} + \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \big/ 2\sqrt{x^2-1}}{p + xw_0 + w_0\sqrt{x^2-1}}\right]$$

Réponse temporelle :

On peut désormais appliquer la transformée inverse de Laplace, puisque l'on sait inverser tous les termes (même si ils sont très lourds !!!) :

$$s(t)=KA\left[1-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}e^{-\left(xw_0-w_0\sqrt{x^2-1}\right)t}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}e^{-\left(xw_0+w_0\sqrt{x^2-1}\right)t}\right]$$

Pente à l'origine :

$$s'(0)=KA\left[\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}\left(xw_0-w_0\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}\left(xw_0+w_0\sqrt{x^2-1}\right)\right]$$

$$s'(0)=\frac{KA}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(\cancel{xw_0}-w_0\sqrt{x^2-1}-\cancel{xw_0}-w_0\sqrt{x^2-1}\right)+\left(xw_0+\cancel{w_0\sqrt{x^2-1}}+xw_0-\cancel{w_0\sqrt{x^2-1}}\right)\right]$$

$$s'(0)=\frac{KA}{2}\underbrace{\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(-2w_0\sqrt{x^2-1}\right)+\left(2xw_0\right)\right]}_{0}$$

On a donc une **pente nulle à l'origine**. C'est un des critères qui permet de ne pas confondre la réponse d'un deuxième ordre fortement amorti avec la réponse d'un premier ordre

Précision statique , ou erreur statique:

Les exponentielles de la solution ci-dessus sont décroissantes, on voit donc que : $\lim_{t\to\infty} s(t)=KA$.

Donc $e_s=\lim_{t\to\infty}\left[e(t)-s(t)\right]=A(1-K)$, soit le même résultat que pour un premier ordre.

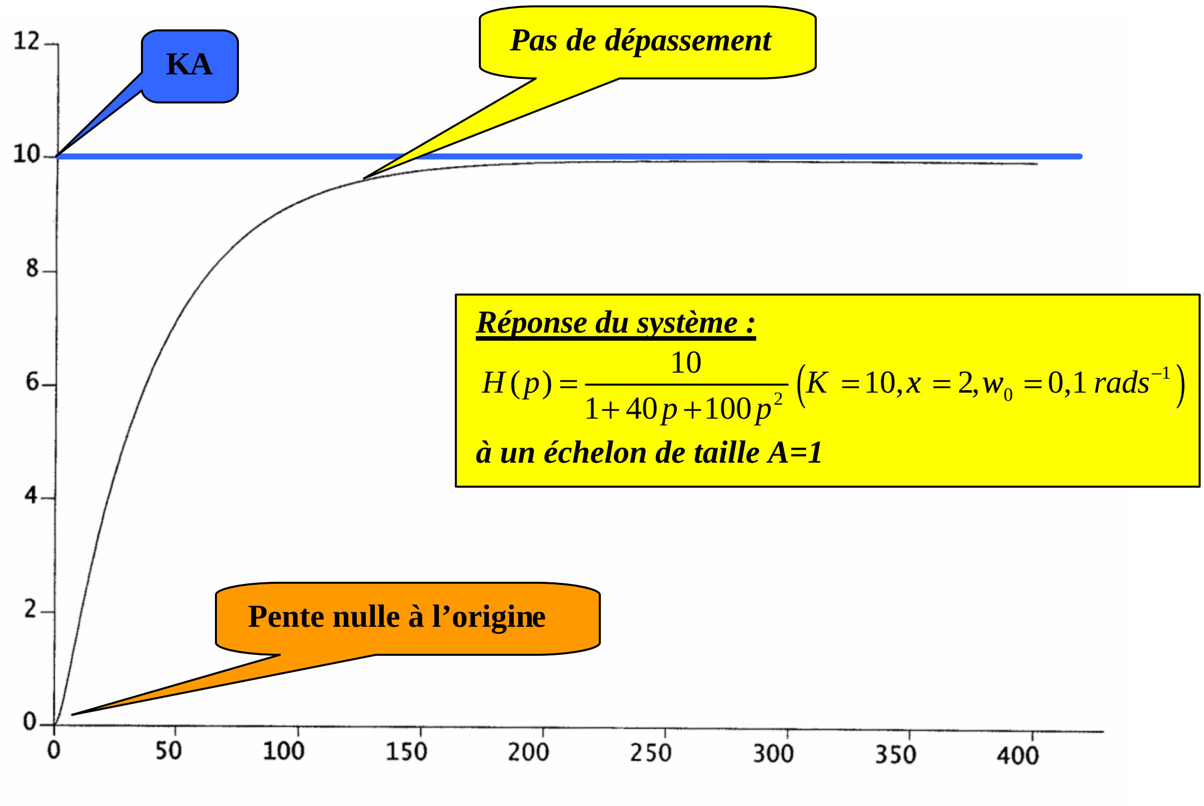
C'est à dire que le système est précis ($e_S=0$) si le gain de la fonction de transfert globale du système est unitaire.

Néanmoins il n'est pas nécessaire de calculer la solution dans le domaine temporelle (d'ailleurs il faut toujours l'éviter vu la lourdeur des calculs) pour trouver l'erreur statique. Il suffit pour cela d'utiliser le théorème de la valeur finale :

$$e_s=\lim_{t\to\infty}\left[e(t)-s(t)\right]=\lim_{p\to 0}p\left[E(p)-S(p)\right]=\lim_{p\to 0}pE(p)\left[1-H(p)\right]$$

$$=\lim_{p\to 0}A\left[1-\frac{K}{1+\frac{2x}{w_0}p+\frac{p^2}{w_0^2}}\right]=A(1-K)$$

Courbe réponse :



Notion de pôles dominants :

Les deux solutions du polynôme du second degré : $\begin{cases} p_1 = -xw_0 + w_0\sqrt{x^2-1} \\ p_2 = -xw_0 - w_0\sqrt{x^2-1} \end{cases}$ sont les pôles de la fonction de la fonction de transfert

Réécrivons la solution en t en fonction des pôles de la fonction de transfert :

$s(t) = KA\left[1 - \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}e^{p_1 t} + \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}e^{p_2 t}\right]$. Si le système est très amorti : $x >> 1$, alors on remarque que $p_2 << p_1$ donc l'exponentielle en $e^{p_2 t}$ (p_2 est négative) s'amortie beaucoup plus vite que l'exponentielle en $e^{p_1 t}$ (p_1 est négative). **On dit que p_1 est le pôle dominant** (en valeur absolu c'est le plus petit) et le système se comporte donc comme un premier ordre de constante de temps : $t_1 = -\dfrac{1}{p_1}$.

En effet on peut recalculer la solution en t avec les nouvelles hypothèses :

$$s(t) = KA\left[1 - \underbrace{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}}_{=1 \text{ avec } x>>1} e^{p_1 t} + \underbrace{\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}e^{p_2 t}}_{\text{négligeable devant l'autre exponentielle}}\right]$$

Soit : $s(t) = KA\left[1 - e^{\left(-\frac{t}{t_1}\right)}\right]$, soit la réponse d'un premier ordre à un échelon de taille A.

On peut redémontrer cela directement à partir de la fonction de transfert globale du système :

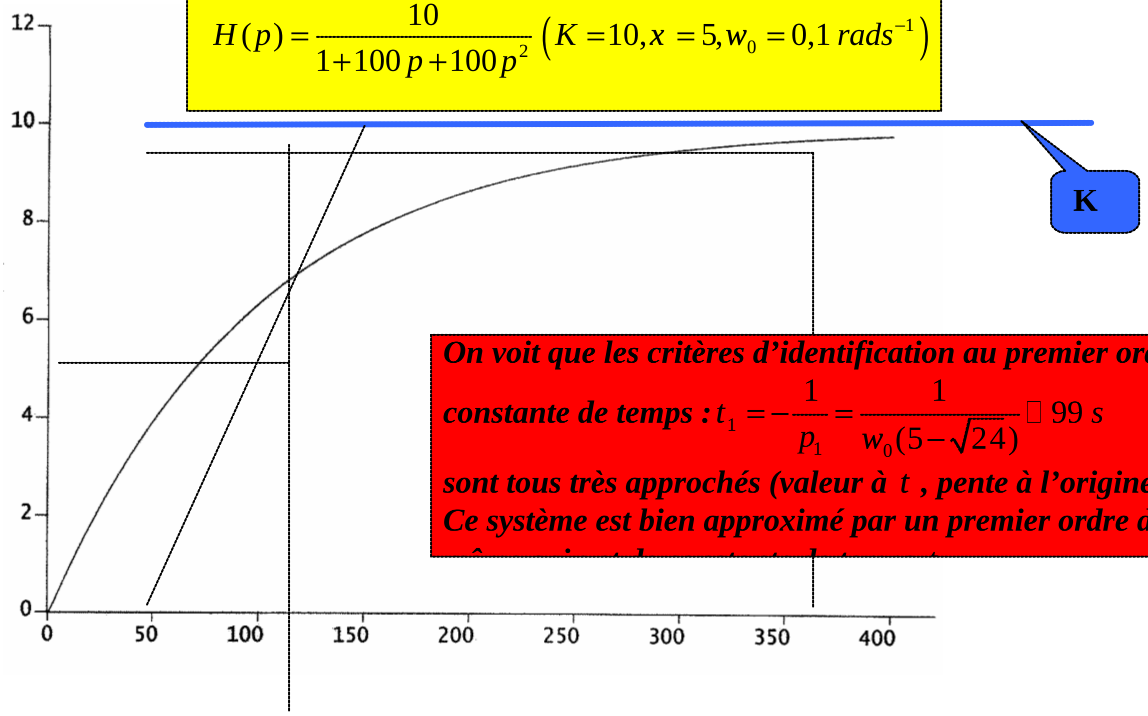
$H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2x}{w_0}p + \dfrac{p^2}{w_0^2}} = \dfrac{Kw_0^{\,2}}{w_0^{\,2} + 2xw_0 p + p^2} = \dfrac{Kw_0^{\,2}}{(p - p_1)(p - p_2)}$ avec p_2 et p_1, pôles de la fonction de transfert tel que $\begin{cases} p_2 << p_1 \\ p_2 < 0 \text{ homogène à } s^{-1} \\ p_1 < 0 \text{ homogène à } s^{-1} \end{cases}$.

On peut donc poser $\begin{cases} p_1 = -\dfrac{1}{t_1} \text{ avec } t_1 \text{ constante de temps} \\ p_2 = -\dfrac{1}{t_2} \text{ avec } t_2 \text{ constante de temps} \end{cases}$.

$H(p) = \dfrac{Kw_0^{\,2}}{(p - p_1)(p - p_2)} = \dfrac{Kw_0^{\,2}}{\left(p + \dfrac{1}{t_1}\right)\left(p + \dfrac{1}{t_2}\right)} = \dfrac{Kw_0^{\,2} t_1 t_2}{(1 + t_1 p)(1 + t_2 p)}$. On remarque donc que le système du second ordre est le produit de deux premiers ordre. Dans l'hypothèse d'un très fort amortissement $x >> 1$, soit encore $p_2 << p_1$ ou encore sur les constantes de temps $t_2 << t_1$. On a donc le produit de deux premiers ordre dont l'un est très lent devant l'autre. Le système se comporte donc bien sûr comme le plus lent, c'est à dire à t_1 qui correspond au ***pôle dominant*** p_1

<u>Réponse du système :</u>

$H(p) = \dfrac{10}{1 + 100p + 100p^2}\ \left(K = 10, x = 5, w_0 = 0{,}1\ rads^{-1}\right)$



On voit que les critères d'identification au premier ordre de constante de temps : $t_1 = -\dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{w_0(5 - \sqrt{24})} \approx 99\ s$ ***sont tous très approchés (valeur à t , pente à l'origine, $t_{5\%}$)***
Ce système est bien approximé par un premier ordre de