SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

ANALYSE TEMPORELLE (Partie 1)

L'étude se limite aux systèmes de bases, c'est à dire aux systèmes du premier ordre et du second ordre. En effet le comportement d'une grande partie des systèmes peut être raisonnablement assimilé au comportement d'un système du premier ou du second ordre.

On va regarder la réponse de ces systèmes à des entrées typiques (échelon et rampe). Ces réponses vont nous permettre d'évaluer un certain nombre de performances associées à ces systèmes.

La connaissance des résultats présentés dans ce chapitre est très utile pour répondre aux problèmes d'asservissement.

1 Système du premier ordre.

1.1 Définition d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre a son comportement régi par une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$s+\tau\frac{ds}{dt}=Ke \quad \begin{cases} e=e(t) & \text{entrée du système} \\ s=s(t) & \text{réponse du système à l'entrée e(t)} \\ K: & \text{gain statique } (>0) \\ \tau: & \text{constante de temps } (>0\text{, homogène à un temps (seconde (s)))} \end{cases}$$

1.2 Fonction de transfert globale d'un premier ordre

On applique la transformée de Laplace à l'ensemble de l'équation différentielle ci-dessus, avec des conditions initiales nulles :

Rappel : La transformée de Laplace d'une fonction f(t) est une fonction de p, notée par convention avec la lettre majuscule de la fonction du temps transformée : F(p)

Donc : $s+\tau\frac{ds}{dt}=Ke \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} S+\tau pS=KE$

On peut alors présenter le rapport de la sortie S(p) sur l'entrée E(p), c'est à dire la fonction de transfert globale du système : $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\tau p}$

On notera :

- Le gain statique vaut : K=H(0)
- Pour identifier les caractéristiques d'un système du premier ordre (c'est à dire K et τ), on veillera bien à présenter la fonction de transfert globale H(p) avec le coefficient en p^0 du polynôme au dénominateur égal à 1. Ainsi le numérateur peut être

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

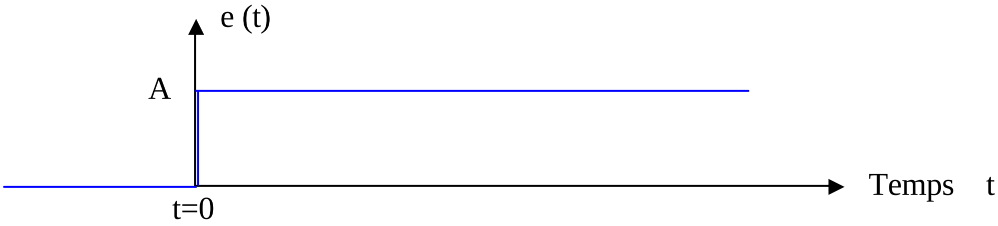
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

identifié au gain statique K et le coefficient en p^1 du polynôme au dénominateur peut être identifié à la constante de temps t

1.3 Réponse à un échelon (réponse dite indicielle)

1.3.1 Réponse dans le domaine fréquentielle (en p)

On soumet le système à une entrée échelon de taille A. L'entrée est donc la fonction du temps : **e(t)= A u(t)** avec u(t) l'échelon unitaire tel que u(t<0)=0 et u(t≥0)=1.



e(t)=A u(t) donc $E(p)=\dfrac{A}{p}$ or $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{K}{1+t\,p} \Rightarrow S(p)=\dfrac{K\,A}{p(1+t\,p)}$

On obtient donc très rapidement la solution (réponse à une entrée) dans le domaine fréquentielle (solution en p).

Le problème est que l'on ne sait pas prendre la transformée de Laplace inverse d'une fonction quelconque. Il va donc falloir décomposer la solution trouvée en somme de termes dont on connaît les transformées inverses. Cela revient à effectuer la décomposition en éléments simples de ce rapport polynomial.

1.3.2 Décomposition en éléments simples

Tout rapport polynomial peut s'écrire comme somme de rapport du type :

$$\frac{a}{p-p_i}\ avec \begin{cases} \text{auncoefficientàdéterminer} \\ p_i\ \text{leszérosdupolynomeaudénominateur} \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples revient à chercher dans notre cas particulier à mettre S(p) sous la forme : $S(p)=\dfrac{K\,A}{p(1+t\,p)}=\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{1+t\,p}$ avec a et b deux coefficients à déterminer.

A partir de la on peut employer deux méthodes pour déterminer a et b :

<u>1ère méthode : (vue en mathématique) :</u>

$$a=\underbrace{pS(p)}_{\text{pour p=0}}=\underbrace{\frac{KA}{1+t\,p}}_{\text{pourp=0}}=KA \qquad \text{et} \qquad b=\underbrace{(1+t\,p)S(p)}_{\text{pour p=-}\frac{1}{t}}=\underbrace{\frac{KA}{p}}_{\text{pourp=-}\frac{1}{t}}=-KAt$$

<u>2ème méthode : identification polynomiale :</u>

$$S(p)=\frac{K\,A}{p(1+t\,p)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{1+t\,p}=\frac{a(1+t\,p)+bp}{p(1+t\,p)}=\frac{a+p(b+at)}{p(1+t\,p)}$$

On en déduit donc en identifiant les numérateurs que : $\begin{cases} a=KA \\ b+at\ =0 \end{cases}$ $soit$ $\begin{cases} a=KA \\ b=-KAt \end{cases}$

Quelle que soit la méthode employée (il est bon de savoir vérifier son calcul par identification), on aboutit à la décomposition de S(p) en éléments simples sous la forme :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

$$S(p) = \frac{KA}{p} - \frac{KAt}{1+t\,p} = KA\left[\frac{1}{p} - \frac{t}{1+t\,p}\right] = KA\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{t}}\right]$$

1.3.3 Réponse dans le domaine temporel

On vient donc de montrer que $S(p) = KA\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right]$ or on a déjà vu lors du cours sur les transformées de Laplace que $\begin{cases} U(p) = L[u(t)] = \frac{1}{p} \\ L[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{p+a} \end{cases}$ (par abus de notation on omet souvent de multiplier toute les fonctions du temps par u(t) l'échelon unitaire ; ce qui revient à écrire : $L[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$)

En lisant ces transformées dans l'autre sens, c'est à dire en prenant les transformées inverses de Laplace, on obtient :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[KA\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right]\right] = KA\left[L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)\right]$$

Soit la solution dans le domaine temporel : $s(t) = KA\left(1-e^{-\frac{t}{t}}\right)u(t)$

Ce qui revient à écrire par abus de notation : $s(t) = KA\left(1-e^{-\frac{t}{t}}\right)$

1.3.4 Analyse temporelle

1.3.4.1 Rapidité

On cherche à évaluer le temps que met le système à répondre à l'entrée, c'est à dire le temps que met le système à passer du régime transitoire au régime permanent. Le régime permanent est la solution particulière de l'équation différentielle que l'on recherche de la même forme que l'entrée, c'est à dire ici une constante.

La réponse du système $s(t) = KA\left(1-e^{-\frac{t}{t}}\right)$ est une courbe qui tend vers la valeur constante KA (asymptote horizontale) en restant toujours inférieure à cette valeur KA.

La rapidité est évaluée dans la pratique, par le temps que met le système à atteindre des valeurs ne s'écartant pas de $\pm$ 5 % de sa valeur asymptotique.Ce temps se note $t_{5\%}$

Pratiquement, pour un premier ordre le temps à 5% est le temps à -5% puisque

$$\forall t, s(t) = KA\left(1-e^{-\frac{t}{t}}\right) < KA$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.