

**- PROBLEME SUR LES ONDES MECANIQUES 1 -**

- **ENONCE :** « Chaîne linéaire d'atomes, avec impureté »

On considère une chaîne linéaire illimitée d'atomes identiques de masse  $m$ .

A l'équilibre, ils sont séparés par une distance  $a$ , et l'atome  $n$  se trouve à une abscisse  $x_n^0$ .

Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe  $Ox$  la position de l'atome  $n$  d'une quantité  $u_n(t) \ll a$ , celui-ci est alors soumis à des interactions complexes, modélisées par des forces de rappel de raideur  $\mathbf{a}$ , limitées entre atomes premiers voisins.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $u_n(t)$ , équation dans laquelle figureront également  $u_{n-1}(t)$  et  $u_{n+1}(t)$ .

2) On veut montrer qu'il existe des ondes élastiques longitudinales de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{e}_x$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ , qui peuvent se propager sans atténuation le long de la chaîne et qui, en notation complexe, ont la forme :

$$\underline{u}_n(t) = A \exp[i(kx_n^0 - \omega t)] \quad A = \text{cste} \in \mathbb{R}$$

Trouver la relation que  $\omega$  et  $k$  doivent satisfaire (relation de dispersion), et dessiner le graphe  $\omega(ka)$ .

3) On note  $\omega_M$  la pulsation maximale des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne : à quelle longueur d'onde  $\lambda_{\min}$  correspond cette pulsation maximale ? Pour cette même pulsation, comment les atomes oscillent-ils les uns par rapport aux autres ? Que se passerait-il si l'on essayait de propager une perturbation de pulsation supérieure à  $\omega_M$  ?

4) Pour préciser les phénomènes découverts dans la question précédente, calculer les vitesses de phase  $v_j$  et de groupe  $v_g$  ; en donner les limites lorsque  $ka \rightarrow 0$  et  $ka \rightarrow \pi$ .

Faire le lien avec la question précédente.

5) Justifier le fait que pour les faibles valeurs de  $k$ , les elongations  $u_n(t)$  peuvent être représentées par une fonction quasi-continue  $u(x,t)$ , où la variable quasi-continue  $x$  représente l'emplacement d'un atome au repos.

A partir d'un développement de Taylor au **second ordre**, déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $u(x,t)$ , et en déduire, dans ces conditions, la célérité  $c$  de ces ondes ; commenter en liaison avec la question 4).

6) Application numérique :

on donne pour le fer :  $a = 2,52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ;  $m = 9,26 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  ;  $\mathbf{a} = 49,4 \text{ N.m}^{-1}$ .

Calculer  $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$  et  $c$ .

De quel type d'ondes s'agit-il ?



## PROBLEME

7) Dans le cadre de « l'approximation des milieux continus » précédente, on place une impureté dans la chaîne précédente : en  $n=0$ , se trouve un atome de masse  $m_0 \neq m$  ; dans la région des abscisses  $x \leq 0$ , on considère une onde harmonique de pulsation  $\omega$  et se propageant selon les abscisses croissantes.

Il y a alors apparition d'une onde réfléchie (« écho ») et d'une onde transmise par l'impureté.

- Donner leur pulsation et leur vecteur d'onde.
- Donner l'expression de l'onde réfléchie  $\underline{u}_n^r(t)$  et de l'onde transmise  $\underline{u}_n^t(t)$ , si l'on décrit l'onde incidente par  $\underline{u}_n^i(t) = A \exp[i(kna - \omega t)]$  ; on notera  $\underline{r}$  le coefficient de réflexion complexe et  $\underline{t}$  le coefficient de transmission complexe.
- Calculer le coefficient de transmission complexe  $\underline{t}$  ; en déduire son module et son argument.
- Cas particuliers : étudier les cas  $m_0 = m$ ;  $m_0 = 0$ ;  $m_0 \rightarrow \infty$  (pour chaque cas particulier, on s'intéressera aux situations où  $ka \rightarrow 0$  et  $ka \rightarrow \mathbf{p}$  ; on pourra notamment caractériser le type d'onde apparaissant du côté des abscisses négatives).

Donner des applications du phénomène étudié précédemment.

\*\*\*\*\*