- PROBLEME SUR LES ONDES MECANIQUES 1 -

• **ENONCE :** « Chaîne linéaire d'atomes, avec impureté »

On considère une chaîne linéaire illimitée d'atomes identiques de masse m.
A l'équilibre, ils sont séparés par une distance a, et l'atome n se trouve à une abscisse x_n^0.
Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe Ox la position de l'atome n d'une quantité $u_n(t) \ll a$, celui-ci est alors soumis à des interactions complexes, modélisées par des forces de rappel de raideur a, limitées entre atomes premiers voisins.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $u_n(t)$, équation dans laquelle figureront également $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$.

2) On veut montrer qu'il existe des ondes élastiques longitudinales de pulsation w et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$, avec $k \in \mathbb{R}$, qui peuvent se propager sans atténuation le long de la chaîne et qui, en notation complexe, ont la forme :

$$\underline{u}_n(t) = A\exp[i(kx_n^0 - wt)] \qquad A = cste \in \mathbb{R}$$

Trouver la relation que w et k doivent satisfaire (relation de dispersion), et dessiner le graphe $w(ka)$.

3) On note w_M la pulsation maximale des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne : à quelle longueur d'onde $l_{\min}$ correspond cette pulsation maximale ? Pour cette même pulsation, comment les atomes oscillent-ils les uns par rapport aux autres ? Que se passerait-il si l'on essayait de propager une perturbation de pulsation supérieure à w_M ?

4) Pour préciser les phénomènes découverts dans la question précédente, calculer les vitesses de phase v_j et de groupe v_g ; en donner les limites lorsque $ka \to 0$ et $ka \to p$.
Faire le lien avec la question précédente.

5) Justifier le fait que pour les faibles valeurs de k, les élongations $u_n(t)$ peuvent être représentées par une fonction quasi-continue $u(x,t)$, où la variable quasi-continue x représente l'emplacement d'un atome au repos.
A partir d'un développement de Taylor au **second ordre**, déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(x,t)$, et en déduire, dans ces conditions, la célérité c de ces ondes ; commenter en liaison avec la question 4).

6) Application numérique :
on donne pour le fer : $a = 2{,}52.10^{-10}\,m$; $m = 9{,}26.10^{-26}\,kg$; $a = 49{,}4\,N.m^{-1}$.

Calculer $f_M = \dfrac{w_M}{2p}$ et c.
De quel type d'ondes s'agit-il ?

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

7) Dans le cadre de «l'approximation des milieux continus » précédente, on place une impureté dans la chaîne précédente : en n=0, se trouve un atome de masse $m_0 \neq m$; dans la région des abscisses $x \leq 0$, on considère une onde harmonique de pulsation w et se propageant selon les abscisses croissantes.
Il y a alors apparition d'une onde réfléchie (« écho ») et d'une onde transmise par l'impureté.

a) Donner leur pulsation et leur vecteur d'onde.

b) Donner l'expression de l'onde réfléchie $\underline{u}_n^r(t)$ et de l'onde transmise $\underline{u}_n^t(t)$, si l'on décrit l'onde incidente par $\underline{u}_n^i(t) = A\exp[i(kna - wt)]$; on notera $\underline{r}$ le coefficient de réflexion complexe et $\underline{t}$ le coefficient de transmission complexe.

c) Calculer le coefficient de transmission complexe $\underline{t}$; en déduire son module et son argument.

d) Cas particuliers : étudier les cas $m_0 = m$; $m_0 = 0$; $m_0 \to \infty$ (pour chaque cas particulier, on s'intéressera aux situations où $ka \to 0$ et $ka \to p$; on pourra notamment caractériser le type d'onde apparaissant du côté des abscisses négatives).
Donner des applications du phénomène étudié précédemment.

****

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.