

- PROBLEME SUR LES ONDES MECANIQUES 1 -

- **ENONCE :** « Chaîne linéaire d'atomes, avec impureté »

On considère une chaîne linéaire illimitée d'atomes identiques de masse m .

A l'équilibre, ils sont séparés par une distance a , et l'atome n se trouve à une abscisse x_n^0 .

Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe Ox la position de l'atome n d'une quantité $u_n(t) \ll a$, celui-ci est alors soumis à des interactions complexes, modélisées par des forces de rappel de raideur \mathbf{a} , limitées entre atomes premiers voisins.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $u_n(t)$, équation dans laquelle figureront également $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$.

2) On veut montrer qu'il existe des ondes élastiques longitudinales de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$, avec $k \in \mathbb{R}$, qui peuvent se propager sans atténuation le long de la chaîne et qui, en notation complexe, ont la forme :

$$u_n(t) = A \exp[i(kx_n^0 - \omega t)] \quad A = \text{cste} \in \mathbb{R}$$

Trouver la relation que ω et k doivent satisfaire (relation de dispersion), et dessiner le graphe $\omega(ka)$.

3) On note ω_M la pulsation maximale des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne : à quelle longueur d'onde λ_{\min} correspond cette pulsation maximale ? Pour cette même pulsation, comment les atomes oscillent-ils les uns par rapport aux autres ? Que se passerait-il si l'on essayait de propager une perturbation de pulsation supérieure à ω_M ?

4) Pour préciser les phénomènes découverts dans la question précédente, calculer les vitesses de phase v_j et de groupe v_g ; en donner les limites lorsque $ka \rightarrow 0$ et $ka \rightarrow \pi$.

Faire le lien avec la question précédente.

5) Justifier le fait que pour les faibles valeurs de k , les élongations $u_n(t)$ peuvent être représentées par une fonction quasi-continue $u(x,t)$, où la variable quasi-continue x représente l'emplacement d'un atome au repos.

A partir d'un développement de Taylor au **second ordre**, déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(x,t)$, et en déduire, dans ces conditions, la célérité c de ces ondes ; commenter en liaison avec la question 4).

6) Application numérique :

on donne pour le fer : $a = 2,52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$; $m = 9,26 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$; $\mathbf{a} = 49,4 \text{ N.m}^{-1}$.

Calculer $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$ et c .

De quel type d'ondes s'agit-il ?



PROBLEME

7) Dans le cadre de « l'approximation des milieux continus » précédente, on place une impureté dans la chaîne précédente : en $n=0$, se trouve un atome de masse $m_0 \neq m$; dans la région des abscisses $x \leq 0$, on considère une onde harmonique de pulsation ω et se propageant selon les abscisses croissantes.

Il y a alors apparition d'une onde réfléchie (« écho ») et d'une onde transmise par l'impureté.

- Donner leur pulsation et leur vecteur d'onde.
- Donner l'expression de l'onde réfléchie $\underline{u}_n^r(t)$ et de l'onde transmise $\underline{u}_n^t(t)$, si l'on décrit l'onde incidente par $\underline{u}_n^i(t) = A \exp[i(kna - \omega t)]$; on notera \underline{r} le coefficient de réflexion complexe et \underline{t} le coefficient de transmission complexe.
- Calculer le coefficient de transmission complexe \underline{t} ; en déduire son module et son argument.
- Cas particuliers : étudier les cas $m_0 = m$; $m_0 = 0$; $m_0 \rightarrow \infty$ (pour chaque cas particulier, on s'intéressera aux situations où $ka \rightarrow 0$ et $ka \rightarrow \mathbf{p}$; on pourra notamment caractériser le type d'onde apparaissant du côté des abscisses négatives).
Donner des applications du phénomène étudié précédemment.
