

- PROBLEME DE MECANIQUE DU POINT 1 -

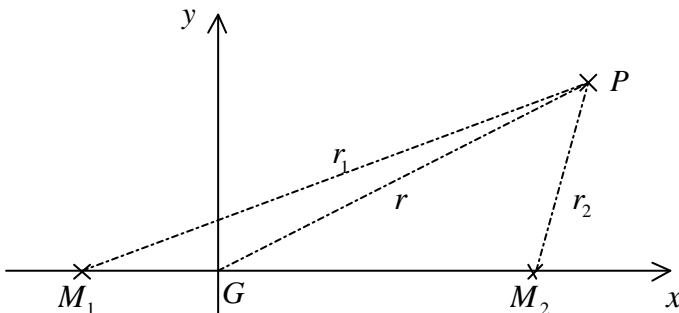
• **ENONCE :** « Points de Lagrange »

Deux points matériels M_1 et M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , gravitent à une distance $a = M_1 M_2$ **constante** l'une de l'autre, l'interaction étant purement gravitationnelle ; le système constitué par les deux masses est mécaniquement isolé.

1) Dans le référentiel barycentrique (R^*) du système, déterminer les trajectoires des deux points matériels.

2) Calculer ω , vitesse angulaire par rapport à (R^*) d'un repère (R) lié à des axes (Gx, Gy), G étant le centre de masse du système précédent, et Gx étant constamment dirigé de M_1 vers M_2 (de plus, Gy est perpendiculaire à Gx).

3) Un point matériel P , de masse m très inférieure à m_1 et m_2 de façon à ne pas perturber le mouvement de M_1 et M_2 , est placé dans le plan Gxy , à l'extérieur de la droite $M_1 M_2$, comme le montre la figure ci-dessous :



Le repérage du point P , dans le référentiel (R), utilisera les **coordonnées bipolaires** r_1 et r_2 .

- a) Calculer, en fonction de r_2 et r_1 , l'énergie potentielle E_p dont dérivent les forces s'exerçant dans (R) sur la masse m .
- b) Montrer que E_p est extrémale en deux points L_4 et L_5 (nommés « points de Lagrange »), symétriques par rapport à la droite $M_1 M_2$.
- c) Comment interpréter la présence de nombreux astéroïdes au voisinage des points L_4 et L_5 du couple Soleil-Jupiter (les « grecs » en L_4 , en avance sur la trajectoire de Jupiter, et les « troyens » en L_5 , en retard par rapport à Jupiter...)?

Remarque : ce phénomène avait été prédit par Lagrange (1736-1813) en 1772, mais la première planète « troyenne » ne fut observée qu'en 1906, presque 100 ans après la mort de Lagrange !

4) On considère maintenant le couple Soleil-Terre, supposé mécaniquement isolé ; la masse du Soleil est notée M , celle de la Terre vaut mM , avec $m \ll 1$.

On peut alors confondre le centre de masse G du système avec le Soleil (point M_1).

MECANIQUE DU POINT MATERIEL**PROBLEME**

- a) Représenter l'allure de la fonction $E_p(x)$, où E_p représente l'énergie potentielle, dans le référentiel (R) précédemment défini, d'une masse m placée en un point d'ordonnée nulle et d'abscisse x , comptée le long d'un axe d'origine la Terre (point M_2) et dirigé vers le Soleil.
- b) En déduire qu'il existe trois autres points de Lagrange (L_1, L_2 et L_3), où $E_p(x)$ est également extrémale ; compte tenu de l'allure de la courbe, ces points sont-ils des positions d'équilibre stables ?
- c) On s'intéresse plus particulièrement à L_1 (entre le Soleil et la Terre), d'abscisse x_1 , et à L_2 , d'abscisse x_2 négative ; déterminer x_1 et x_2 en fonction de a et m (dans un premier temps, on pourra supposer que x_1 et $|x_2|$ sont très inférieures à a , hypothèse que l'on vérifiera à la fin du calcul). Comment sont situés L_1 et L_2 par rapport à la Terre ?
- d) Application numérique : on donne $a = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ et $m = 3 \cdot 10^{-6}$
Calculer x_1 et x_2 .
- e) Le point L_1 est occupé depuis plusieurs années par le satellite SOHO (Solar And Heliospheric Observatory): quel est l'intérêt d'un tel positionnement ? Vous paraît-il simple de maintenir un satellite au voisinage de L_1 ?
