Quelques propriétés des fonctions harmoniques à deux variables

Dans ce problème, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
Pour k dans $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R})$ l'algèbre des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}$.
Soit f dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$. Le *laplacien* de f est l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par : $\Delta(f)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
f est dite *harmonique* si $\Delta f\equiv 0$. On note $\mathcal{H}(\Omega,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω.

I. Question de cours : le laplacien en polaires

Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. On pose $\begin{cases}\mathcal{U}=\{(\rho,\theta),\ \rho>0,\ -\pi<\theta<\pi\}\\ \Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\le 0\}\end{cases}$

Soit f une application définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit F définie sur $\mathcal{U}$ par $F=f\circ\varphi$.
Pour tout point (x,y) de Ω, on a donc $f(x,y)=F(\rho,\theta)$ avec $(x,y)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

1. Montrer que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{U}$ sur Ω. Préciser φ^{-1}. [S]
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. L'application F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
   Exprimer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de F. [S]
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. L'application F est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$.
   Exprimer Δf en fonction des dérivées partielles premières et secondes de F. [S]

II. Quelques exemples de fonctions harmoniques

Dans le reste du problème, il est demandé de ne pas chercher à utiliser les résultats de la partie I.

1. Dans cette question, Ω désigne l'ouvert $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'application $f:(x,y)\mapsto\arctan(y/x)$ est harmonique sur Ω. [S]
   (b) Réciproquement, déterminer les applications f de $\mathcal{H}(\Omega,\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une application $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $f(x,y)=\varphi(y/x)$ pour tout (x,y) de Ω. [S]
2. Dans cette question, Ω désigne l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. On note $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
   (a) Montrer que l'application $(x,y)\mapsto\ln r(x,y)$ est harmonique sur Ω. [S]
   (b) Réciproquement, déterminer les applications f de $\mathcal{H}(\Omega,\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une application $\varphi:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que : $\forall\,(x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\varphi(r(x,y))$. [S]

III. Opérations sur les fonctions harmoniques

1. Montrer que $\mathcal{H}(\Omega,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel mais pas une sous-algèbre de $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$. [S]
2. Soit f un élement de $\mathcal{C}^m(\Omega,\mathbb{R})$, avec $m\ge 3$. Soit p un entier tel que $1\le p\le m-2$.
   Soi g une application dérivée partielle d'ordre p de f. Montrer que g est harmonique.
   Indication : utiliser une récurrence finie sur l'ordre de dérivation. [S]
3. Dans cette question, f,g,h sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
   On suppose que l'application f est harmonique.
   On suppose qu'on a les égalités $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}=-\varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial x}$, avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$.
   (a) Montrer que les applications g et h sont harmoniques. [S]
   (b) Montrer que F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y)=f(g(x,y),h(x,y))$ est harmonique. [S]
   (c) Montrer que l'application gh est harmonique. [S]
   (d) Soit φ une similitude affine de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $F=f\circ\varphi$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. [S]

IV. Fonctions polynomiales harmoniques

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des applications f définies par $f(x,y) = \sum\limits_{p,q\geq 0} \lambda_{p,q}\, x^p y^q$, où les $\lambda_{p,q}$ sont réels (tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.)

L'ensemble $\mathcal{P}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, et les fonctions monômes $(x,y)\mapsto x^p y^q$ en constituent une base.

Pour tout m de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des fonctions polynomiales homogènes de degré m :

Autrement dit, $f\in\mathcal{P}_m \Leftrightarrow \exists\,(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^{m+1},\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{m}\lambda_k\, x^k y^{m-k}$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ est la somme directe de ses sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_m$.

On note $\mathcal{Y} = \mathcal{P}\cap\mathcal{H}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynomiales harmoniques.

On note $\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}\cap\mathcal{P}_m$ l'ensemble des fonctions polynomiales harmoniques homogènes de degré m.

Il est clair que $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}_m$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}_m$.

1. (a) Préciser une base et la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$, pour m dans $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Indiquer la dimension et une base de $\mathcal{Y}_0$ et de $\mathcal{Y}_1$. [S]
   (c) Soit m un entier supérieur ou égal à 2 et f un élément de $\mathcal{P}_m$.
   Il existe donc $(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ tel que : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{m}\lambda_k\, x^k y^{n-k}$.
   Indiquer les conditions sur les λ_k pour que f soit harmonique.
   En considérant l'application qui à f associe (λ_0,λ_1), montrer que $\dim\mathcal{Y}_m = 2$. [S]
   (d) Soit $m\geq 2$. On définit $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x+iy)^m = f(x,y)+ig(x,y)$.
   Montrer que f et g forment une base de $\mathcal{Y}_m$.
   Expliciter par exemple une base de $\mathcal{Y}_2$ et une base de $\mathcal{Y}_5$. [S]
2. Soit f dans $\mathcal{P}_m$. Si $m\geq 1$, vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{P}_{m-1}$.
   Montrer que pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a l'égalité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=mf(x,y)$. [S]
3. Soit m un entier strictement positif et p un élément de $\mathcal{Y}_m$.
   Pour tout réel λ, et tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $h_\lambda(x,y)=xp(x,y)-\lambda(x^2+y^2)\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y)$.
   (a) Vérifier que l'application h_λ est dans $\mathcal{P}_{m+1}$. [S]
   (b) Montrer que $\Delta h_\lambda = 2(1-2m\lambda)\dfrac{\partial p}{\partial x}$. [S]
   (c) En déduire : $\exists\,(h,g)\in\mathcal{Y}_{m+1}\times\mathcal{P}_{m-1},\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xp(x,y)=h(x,y)+(x^2+y^2)g(x,y)$.
   Remarquer (sans reprendre les calculs précédents) qu'on arrive à une conclusion analogue en considérant l'application définie par $(x,y)\mapsto yp(x,y)$. [S]
4. Pour simplifier les notations, on note $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Soit f dans $\mathcal{P}_2$. Montrer qu'il existe λ unique dans $\mathbb{R}$ tel que $h=f-\lambda r^2$ soit dans $\mathcal{Y}_2$. [S]
   (b) On se donne un entier $m\geq 2$ et f dans $\mathcal{P}_m$. Montrer $\exists\,(h,g)\in\mathcal{Y}_m\times\mathcal{P}_{m-2},\ f=h+r^2g$.
   Indication : raisonner par récurrence sur m, en utilisant (IV 2) et (IV 3c).
   En raisonnant sur les dimensions montrer que cette décomposition de f est unique. [S]
   (c) Soit m dans $\mathbb{N}$ et f dans $\mathcal{P}_m$. Montrer que f s'écrit de façon unique $f=\sum\limits_{0\leq k\leq m/2} r^{2k}\, h_{m-2k}$, où chaque h_{m-2k} est dans $\mathcal{Y}_{m-2k}$. Indication : récurrence sur m. [S]

Corrigé du problème

Question de cours : le laplacien en polaires

1. L'application φ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
On se donne (x, y) dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $(x \leq 0, y = 0)$.
Si on cherche ρ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et θ dans $]-\pi, \pi[$, alors on trouve :
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ x+\rho = 2\rho\cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ y = 2\rho\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{x+\rho} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = 2\arctan\dfrac{y}{x+\rho} \end{cases}$$
Ainsi φ est une bijection de $\mathcal{U}$ dans Ω, et les calculs précédents montrent que la bijection réciproque est donnée par $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = 2\arctan\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$
Les deux applications $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \theta(x, y)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ (comme résultant d'opérations et de compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.)
Conclusion : l'application φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{U}$ sur Ω. [Q]

2. On différencie le changement de variables et on inverse le système obtenu :
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\rho = \cos\theta\ \mathrm{d}x + \sin\theta\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\ \mathrm{d}x + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\ \mathrm{d}y \end{cases}$$
On en déduit : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = \cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial \rho} - \dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial \rho} + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}$ [Q]

3. On interprète le résultat précédent comme des relations entre opérateurs de dérivation partielle.
On écrit donc : $\dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial \rho} - \dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$
Pour calculer la dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ on applique cet opérateur à $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)\Big(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\Big) \\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\Big) \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\partial \theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\partial \theta} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} \end{aligned}$$