Quelques propriétés des fonctions harmoniques à deux variables

Dans ce problème, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
Pour k dans $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ l'algèbre des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}$.
Soit f dans $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Le *laplacien* de f est l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par : $\Delta(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
f est dite *harmonique* si $\Delta f \equiv 0$. On note $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω.

I. Question de cours : le laplacien en polaires

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On pose $\begin{cases} \mathcal{U} = \{(\rho, \theta),\ \rho > 0,\ -\pi < \theta < \pi\} \\ \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0),\ x \leq 0\} \end{cases}$

Soit f une application définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit F définie sur $\mathcal{U}$ par $F = f \circ \varphi$.
Pour tout point (x, y) de Ω, on a donc $f(x, y) = F(\rho, \theta)$ avec $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

1. Montrer que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{U}$ sur Ω. Préciser φ^{-1}. [S]
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. L'application F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
   Exprimer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de F. [S]
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. L'application F est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$.
   Exprimer Δf en fonction des dérivées partielles premières et secondes de F. [S]

II. Quelques exemples de fonctions harmoniques

Dans le reste du problème, il est demandé de ne pas chercher à utiliser les résultats de la partie I.

1. Dans cette question, Ω désigne l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'application $f : (x, y) \mapsto \arctan(y/x)$ est harmonique sur Ω. [S]
   (b) Réciproquement, déterminer les applications f de $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $f(x, y) = \varphi(y/x)$ pour tout (x, y) de Ω. [S]
2. Dans cette question, Ω désigne l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On note $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (a) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto \ln r(x, y)$ est harmonique sur Ω. [S]
   (b) Réciproquement, déterminer les applications f de $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une application $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que : $\forall (x, y) \in \Omega, f(x, y) = \varphi(r(x, y))$. [S]

III. Opérations sur les fonctions harmoniques

1. Montrer que $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel mais pas une sous-algèbre de $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. [S]
2. Soit f un élement de $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R})$, avec $m \geq 3$. Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq m - 2$.
   Soi g une application dérivée partielle d'ordre p de f. Montrer que g est harmonique.
   Indication : utiliser une récurrence finie sur l'ordre de dérivation. [S]
3. Dans cette question, f, g, h sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
   On suppose que l'application f est harmonique.
   On suppose qu'on a les égalités $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial h}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -\varepsilon \dfrac{\partial h}{\partial x}$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
   (a) Montrer que les applications g et h sont harmoniques. [S]
   (b) Montrer que F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ est harmonique. [S]
   (c) Montrer que l'application gh est harmonique. [S]
   (d) Soit φ une similitude affine de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $F = f \circ \varphi$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

IV. Fonctions polynomiales harmoniques

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des applications f définies par $f(x,y) = \sum_{p,q\geq 0} \lambda_{p,q}\, x^p y^q$, où les $\lambda_{p,q}$ sont réels (tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.)

L'ensemble $\mathcal{P}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, et les fonctions monômes $(x,y)\mapsto x^p y^q$ en constituent une base.

Pour tout m de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des fonctions polynomiales homogènes de degré m :

Autrement dit, $f\in\mathcal{P}_m \Leftrightarrow \exists\,(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^{m+1},\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\lambda_k\, x^k y^{m-k}$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ est la somme directe de ses sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_m$.

On note $\mathcal{Y} = \mathcal{P}\cap\mathcal{H}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynomiales harmoniques.

On note $\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}\cap\mathcal{P}_m$ l'ensemble des fonctions polynomiales harmoniques homogènes de degré m.

Il est clair que $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}_m$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}_m$.

1. (a) Préciser une base et la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$, pour m dans $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Indiquer la dimension et une base de $\mathcal{Y}_0$ et de $\mathcal{Y}_1$. [S]
   (c) Soit m un entier supérieur ou égal à 2 et f un élément de $\mathcal{P}_m$.
   Il existe donc $(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ tel que : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\lambda_k\, x^k y^{n-k}$.
   Indiquer les conditions sur les λ_k pour que f soit harmonique.
   En considérant l'application qui à f associe (λ_0,λ_1), montrer que $\dim\mathcal{Y}_m = 2$. [S]
   (d) Soit $m\geq 2$. On définit $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x+iy)^m = f(x,y)+ig(x,y)$.
   Montrer que f et g forment une base de $\mathcal{Y}_m$.
   Expliciter par exemple une base de $\mathcal{Y}_2$ et une base de $\mathcal{Y}_5$. [S]
2. Soit f dans $\mathcal{P}_m$. Si $m\geq 1$, vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{P}_{m-1}$.
   Montrer que pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a l'égalité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = mf(x,y)$. [S]
3. Soit m un entier strictement positif et p un élément de $\mathcal{Y}_m$.
   Pour tout réel λ, et tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $h_\lambda(x,y) = xp(x,y)-\lambda(x^2+y^2)\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y)$.
   (a) Vérifier que l'application h_λ est dans $\mathcal{P}_{m+1}$. [S]
   (b) Montrer que $\Delta h_\lambda = 2(1-2m\lambda)\dfrac{\partial p}{\partial x}$. [S]
   (c) En déduire : $\exists\,(h,g)\in\mathcal{Y}_{m+1}\times\mathcal{P}_{m-1},\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xp(x,y) = h(x,y)+(x^2+y^2)g(x,y)$.
   Remarquer (sans reprendre les calculs précédents) qu'on arrive à une conclusion analogue en considérant l'application définie par $(x,y)\mapsto yp(x,y)$. [S]
4. Pour simplifier les notations, on note $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Soit f dans $\mathcal{P}_2$. Montrer qu'il existe λ unique dans $\mathbb{R}$ tel que $h = f-\lambda r^2$ soit dans $\mathcal{Y}_2$. [S]
   (b) On se donne un entier $m\geq 2$ et f dans $\mathcal{P}_m$. Montrer $\exists\,(h,g)\in\mathcal{Y}_m\times\mathcal{P}_{m-2},\ f = h+r^2 g$.
   Indication : raisonner par récurrence sur m, en utilisant (IV 2) et (IV 3c).
   En raisonnant sur les dimensions montrer que cette décomposition de f est unique. [S]
   (c) Soit m dans $\mathbb{N}$ et f dans $\mathcal{P}_m$. Montrer que f s'écrit de façon unique $f = \sum_{0\leq k\leq m/2} r^{2k}\, h_{m-2k}$, où chaque h_{m-2k} est dans $\mathcal{Y}_{m-2k}$. Indication : récurrence sur m. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Corrigé du problème

Question de cours : le laplacien en polaires

1. L'application φ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On se donne (x,y) dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $(x \le 0, y = 0)$.
   Si on cherche ρ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et θ dans $]-\pi,\pi[$, alors on trouve :
   $$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ x+\rho = 2\rho\cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ y = 2\rho\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{x+\rho} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = 2\arctan\dfrac{y}{x+\rho} \end{cases}$$
   Ainsi φ est une bijection de $\mathcal{U}$ dans Ω, et les calculs précédents montrent que la bijection réciproque est donnée par $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = 2\arctan\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$
   Les deux applications $(x,y)\mapsto\rho(x,y)$ et $(x,y)\mapsto\theta(x,y)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ (comme résultant d'opérations et de compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.)
   Conclusion : l'application φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{U}$ sur Ω. [Q]

2. On différencie le changement de variables et on inverse le système obtenu :
   $$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\rho = \cos\theta\ \mathrm{d}x + \sin\theta\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\ \mathrm{d}x + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\ \mathrm{d}y \end{cases}$$
   On en déduit : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} = \cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} - \dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} = \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} \end{cases}$ [Q]

3. On interprète le résultat précédent comme des relations entre opérateurs de dérivation partielle.
   On écrit donc : $\dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial\rho} - \dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$
   Pour calculer la dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ on applique cet opérateur à $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
   $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Big(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta}\Big) \\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta}\Big) \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\theta} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho}\end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.