Quelques propriétés de la cardioïde

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure habituelle de plan euclidien orienté.
Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif.
On appelle *cardioïde* la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ dont une équation en polaires est $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

Première partie

1. Étudier et tracer la courbe Γ. On précisera l'angle polaire (dans le repère canonique) de la tangente au point de paramètre θ de Γ. On indiquera en particulier quels sont les points à tangente horizontale ou verticale. [S]
2. (a) Montrer que pour tout réel φ, il y a exactement trois points M, N, P de Γ en lesquels la tangente à Γ a pour angle polaire φ. [S]
   (b) Déterminer le centre de gravité du triangle MNP. [S]
   (c) Déterminer l'aire du triangle MNP. [S]
   (d) Quand le point M décrit Γ, reconnaître la courbe décrite par le milieu I du segment NP (comment cette courbe se déduit-elle de Γ ?) [S]
3. Déterminer une représentation en polaires de la courbe Γ' décrite par la projection orthogonale $N(\theta)$ de O sur la tangente à Γ en $M(\theta)$. Construire Γ'. [S]
4. Une droite variable Δ, passant par O, rencontre Γ en deux points P et Q autres que O. On note A le point de coordonnées $(2a, 0)$.
   (a) Déterminer le lieu du barycentre J du triangle APQ. [S]
   (b) Déterminer le lieu du point d'intersection I des tangentes en P et Q à Γ. [S]
5. Soit (C) un cercle fixe de rayon $a > 0$. Un cercle mobile (C') de même rayon roule sans glisser sur (C). Montrer que la trajectoire d'un point M de (C') est une cardioïde. [S]
6. On note $A(\theta)$ le point d'angle polaire θ d'un cercle de centre 0.
   On considère la droite D_θ passant par les points $A(\theta)$ et $A(2\theta)$.
   Montrer que quand θ varie, D_θ reste tangente à une cardioïde que l'on déterminera. [S]

Deuxième partie

1. Déterminer le centre de courbure au point de paramètre $\theta = 0$ de Γ. [S]
2. On oriente Γ dans le sens des θ croissants.
   (a) Déterminer une abscisse curviligne sur Γ, avec $(0, 0)$ comme origine.
   Quelle est la longueur totale de la courbe Γ ? [S]
   (b) Préciser le repère de Frenet et la courbure au point de paramètre θ. [S]
   (c) Montrer que l'ensemble des centres de courbure de Γ est une cardioïde, dont on indiquera par quelle transformation géométrique simple elle se déduit de Γ. [S]

Troisième partie

1. Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan intérieur à la cardioïde Γ.

   On suppose que $\mathcal{D}$ est recouvert d'une densité surfacique constante $\mu > 0$.

   On note $\mathcal{D}^+$ l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le demi-plan $y \geq 0$.

   (a) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$. [S]

   (b) Calculer le centre d'inertie de $\mathcal{D}$ et celui de $\mathcal{D}^+$. [S]

   (c) Calculer les moments d'inertie de $\mathcal{D}$ par rapport à Ox, à Oy, à O. [S]

   (d) Calculer le volume qu'engendrerait $\mathcal{D}$ par rotation autour de Ox. [S]

2. On suppose que Γ est recouvert d'une densité linéique constante $\mu > 0$.

   On note Γ^+ l'intersection de Γ avec le demi-plan $y \geq 0$.

   (a) Calculer le centre d'inertie de Γ et celui de Γ^+. [S]

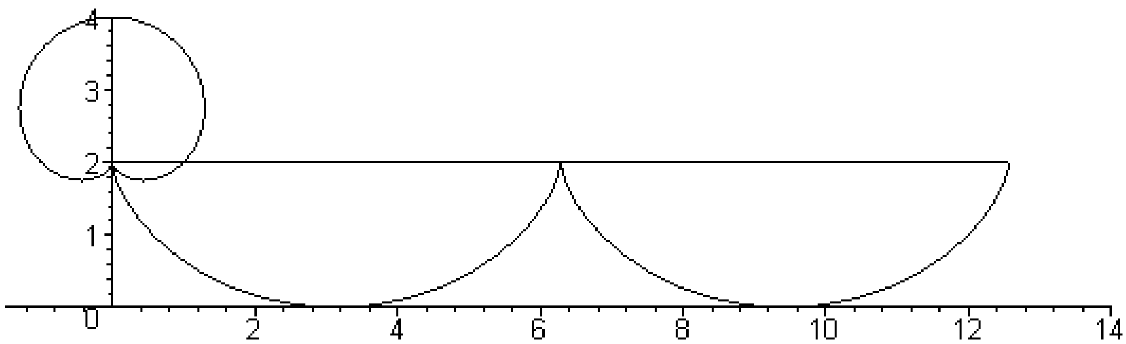
   (b) Calculer les moments d'inertie de Γ par rapport à Ox, à Oy, à O. [S]

   (c) Calculer l'aire de la nappe qu'engendrerait Γ^+ par rotation autour de Ox. [S]

3. On considère la cycloïde, d'équation $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 + \cos(t) \end{cases}$, pour t réel.

   Chaque arche de cette cycloïde a pour longueur 8.

   Sur le point $(0, 2)$ de la cycloïde, on "pose" une cardioïde de longueur 8, comme indiqué :



   On fait ensuite rouler la cardioïde sur la cycloïde, sans glisser. Montrer que, pendant ce mouvement, le point de rebroussement de la cardioïde décrit la droite $y = 2$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. L'application $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est 2π-périodique et paire. On peut donc limiter l'étude à $[0,\pi]$ puis procéder à une symétrie par rapport à Ox pour obtenir toute la courbe.

   La fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$ reste strictement positive sur $[0,\pi[$. Elle s'annule en $\theta = \pi$ ce qui indique un passage à l'origine avec une tangente horizontale. Compte tenu de la symétrie par rapport à Ox, l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

   Notons V (resp. φ) l'angle polaire de la tangente en $M(\theta)$ dans le repère mobile (resp. dans le repère fixe). On sait que $\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta} = -\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$.

   On en déduit $V = \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\ (\pi)$, puis $\varphi = V + \theta = \frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

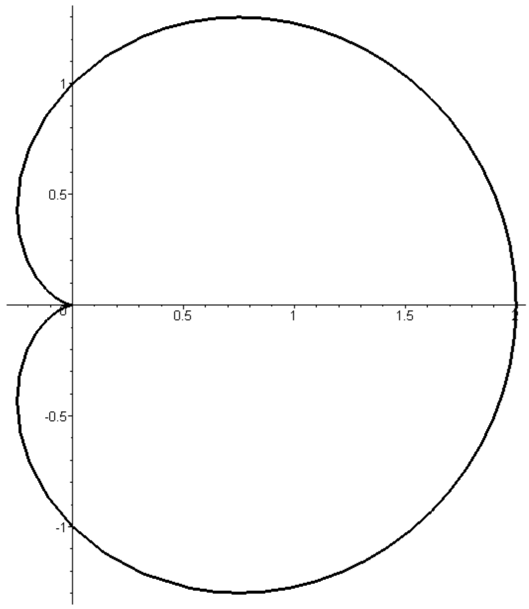
   Le calcul précédent est encore valable si $\theta = 0\ (\pi)$. En effet on a $\rho'(0) = 0$ donc la tangente en $M(0) = (2a, 0)$ est verticale, et pour $\theta = \pi$ on sait que la tangente est horizontale.

   – Les points à tangente horizontale sont caractérisés par $\varphi = 0\ (\pi)$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
     On trouve $M(\pi) = (0,0)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$ et $M\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3a}{4}, \frac{-3a\sqrt{3}}{4}\right)$.

   – Les points à tangente verticale sont caractérisés par $\varphi = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ donc par $\theta = 0\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
     On trouve $M(0) = (2a, 0)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a}{4}, -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

   Voici le tableau de variation et le tracé (obtenu avec Maple, en choisissant $a = 1$.)

θ	0		π/3		π/2		2π/3		π
ρ′(θ)	0	-		-		-		-	0
ρ(θ)	2a	↘	3a/2	↘	a	↘	a/2	↘	0
φ mod π	π/2		0		π/4		π/2		0



   [Q]

2. (a) L'angle polaire (dans le repère fixe) de la tangente en $M(\theta)$ est $\varphi = \frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

   Fixer φ conduit à $\frac{3\theta}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ puis à $\theta = \frac{2\varphi}{3}+\frac{\pi}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

   On obtient trois solutions modulo 2π : $\theta_1 = \frac{2\varphi}{3}-\frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\varphi}{3}+\frac{\pi}{3}$ et $\theta_1 = \frac{2\varphi}{3}+\pi$.

   Pour tout angle φ, il y a donc toujours trois points distincts M, N, P de Γ en lesquels la tangente à Γ a pour angle polaire φ. [Q]

(b) Notons θ_1, $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_3 = \theta_1 + \frac{4\pi}{3}$ les angles polaires des points M, N, P.

Les coordonnées du point $M(\theta)$ sont $\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = \frac{a}{2}(2\cos\theta + 1 + \cos 2\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \frac{a}{2}(2\sin\theta + \sin 2\theta) \end{cases}$

Pour chacun des angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, on a $(\mathrm{e}^{i\theta})^3 = \omega$, avec $\omega = \mathrm{e}^{3i\theta_1}$.

Ains les nombres complexes $\mathrm{e}^{i\theta_1}$, $\mathrm{e}^{i\theta_2}$ et $\mathrm{e}^{i\theta_3}$ sont solutions de $z^3 - \omega = 0$.

Leurs fonctions symétriques élémentaires vérifient donc $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Il en découle $\sigma_1 = \sum_k \mathrm{e}^{i\theta_k} = 0$, puis $S_2 = \sum_k \mathrm{e}^{2i\theta_k} = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$.

On en déduit $\begin{cases} \sum_k \cos\theta_k = \sum_k \sin\theta_k = 0 \\ \sum_k \cos 2\theta_k = \sum_k \sin 2\theta_k = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x(\theta_1) + x(\theta_2) + x(\theta_3) = \frac{3a}{2} \\ y(\theta_1) + y(\theta_2) + y(\theta_3) = 0 \end{cases}$

Cela prouve que le centre de gravité du triangle MNP est toujours $G\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. [Q]

(c) Les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ vérifient $\cos 3\theta = \cos 3\theta_1$ donc $4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta_1 = 0$.

On en déduit en particulier les relations suivantes :

- $\sigma_1 = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0$ (mais on le savait déjà.)
- $\sigma_2 = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_3 + \cos\theta_2\cos\theta_3 = -\frac{3}{4}$.

L'aire du triangle MNP est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})|$.

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) &= \det(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) \\
&= \det(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) + \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) + \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \\
&= \rho(\theta_2)\rho(\theta_3)\sin(\theta_3 - \theta_2) + \rho(\theta_3)\rho(\theta_1)\sin(\theta_1 - \theta_3) + \rho(\theta_1)\rho(\theta_2)\sin(\theta_2 - \theta_1) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(\rho(\theta_2)\rho(\theta_3) + \rho(\theta_3)\rho(\theta_1) + \rho(\theta_1)\rho(\theta_2)) \\
&= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}((1+\cos\theta_2)(1+\cos\theta_3) + (1+\cos\theta_3)(1+\cos\theta_1) + (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)) \\
&= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(3 + 2\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{9a^2\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'aire du triangle MNP est constante, égale à $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. [Q]

(d) On sait que le centre de gravité du triangle MNP est $G\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

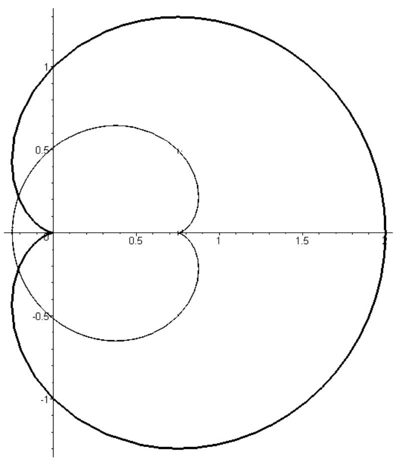
On a $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG}$

donc $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OG}$

puis $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$.

Le point I se déduit donc de M par la composée de l'homothétie de centre 0 et de rayon $-1/2$ puis de la translation de vecteur $3\overrightarrow{OG}/2 = (3a/4, 0)$.

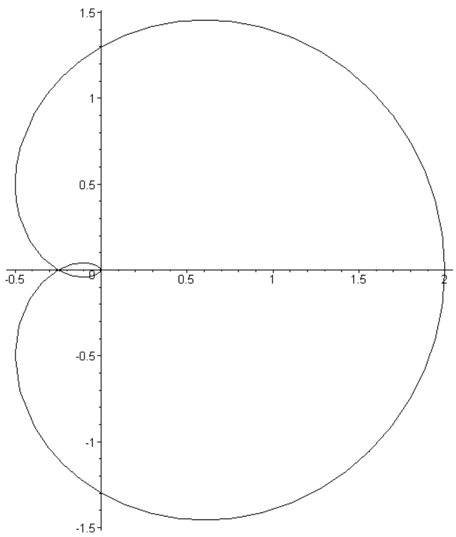
La courbe décrite par I est donc encore une cardioïde, représentée ici (son point de rebroussement est en $(3a/4, 0)$.)



[Q]

3. La tangente à Γ en $M(\theta)$ est dirigée par $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.
La droite (ON) est donc dirigée par $\overrightarrow{u}(\frac{3\theta}{2}) = (\sin\varphi, -\cos\varphi) = \left(\cos\frac{3\theta}{2}, \sin\frac{3\theta}{2}\right)$.
Ainsi il existe une fonction $\lambda(\theta)$ telle que $\overrightarrow{ON} = \lambda(\theta)\overrightarrow{u}(\frac{3\theta}{2})$
Il reste à écrire que $(\overrightarrow{ON} \mid \overrightarrow{MN}) = 0$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{ON}) = \|\overrightarrow{ON}\|^2$.
Cela s'écrit $\lambda(\theta)^2 = a(1+\cos\theta)\lambda(\theta)\ (\overrightarrow{u}(\theta) \mid \overrightarrow{u}(\frac{3\theta}{2})) = a(1+\cos\theta)\lambda(\theta)\cos\frac{\theta}{2}$.
On trouve finalement $\lambda(\theta) = a(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} = 2a\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^3$.
Remarque : on a simplifié par $\lambda(\theta)$ mais on constate que le cas $\lambda(\theta) = 0$ correspond à un point N à l'origine, c'est-à-dire à une tangente à Γ passant par 0. Or seule la tangente en $M(\pi) = O$ à Γ passe par O. On constate d'ailleurs que pour $\theta = \pi$, la formule obtenue ci-dessus donne bien $\lambda(\pi) = 0$.
Ainsi, pour tout θ, $\overrightarrow{ON} = 2a\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^3\overrightarrow{u}(\frac{3\theta}{2}) = 2a\left(\cos\frac{\theta'}{3}\right)^3\overrightarrow{u}(\theta')$ en posant $\theta' = \frac{3\theta}{2}$.
Cela signifie que le point N parcourt la courbe d'équation $\rho = 2a\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$ en polaires.
L'application $\theta \mapsto 2a\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$ est 6π-périodique et paire. On peut donc réduire l'étude à $[0, 3\pi]$ puis procéder à une symétrie par rapport à Ox (on obtient toute la courbe.)
On observe de plus que $\rho(3\pi-\theta) = -\rho(\theta)$. Cela signifie que les points $M(\theta)$ et $M(3\pi-\theta)$ sont symétriques par rapport à Ox.
On peut donc se ramener à $[0, \frac{3\pi}{2}]$ et procéder à une symétrie par rapport à Ox (la symétrie déjà obtenue devenant alors inutile.)
On a $\rho'(\theta) = -2a\sin\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}$, d'où avec les notations habituelles : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -\operatorname{cotan}\frac{\theta}{3}$.
On en déduit que l'angle polaire (dans le repère canonique) de la tangente au point de paramètre θ est égal à $\varphi = \theta + V = \frac{4\theta}{3} + \frac{\pi}{2}\ (\pi)$.
Voici le tableau de variation et le tracé (obtenu avec Maple, en choisissant $a = 1$.)

θ	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	-		-		-	0
$\rho(\theta)$	2a	↘	$3a\sqrt{3}/4$	↘	a/4	↘	0
φ mod π	$\pi/2$		$\pi/6$		$5\pi/6$		$\pi/2$



On observe un passage à l'origine pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$, donc avec une tangente verticale.
Le point $(-\frac{a}{4}, 0)$ est un point double, obtenu à la fois pour $\theta = \pi$ et pour $\theta = -\pi$. [Q]