

## Une famille d'arcs paramétrés

Pour tout réel  $a$ , on considère l'arc de  $\mathbb{R}^2$  paramétré par  $x(t) = \frac{1}{t(t^2 - 1)}$  et  $y_a(t) = \frac{t(t - a)}{t^2 - 1}$ .

On note  $\Gamma_a$  la courbe représentative de cet arc.

1. Montrer que  $\Gamma_{-a}$  se déduit de  $\Gamma_a$  par une transformation géométrique simple.  
Dans toute la suite, on se limitera donc à la condition  $a \geq 0$ . [S]
2. (a) Préciser le domaine d'étude de l'arc  $\Gamma_a$ . [S]  
(b) Indiquer les limites de  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y_a(t)$  aux bornes du domaine d'étude. [S]  
(c) Préciser le signe de  $x'(t)$  et  $y'(t)$  par intervalles.  
On sera notamment amené à distinguer les cas  $a = 0$ ,  $0 < a < 1$ ,  $a = 1$  et  $a > 1$ .  
Si  $0 < a < 1$ , on placera les racines  $t_1 < t_2$  de  $y'(t)$  par rapport à  $-1, 0, 1$ . [S]  
(d) Dresser les tableaux de variations des arcs  $\Gamma_a$  en discutant suivant les valeurs de  $a$ .  
On considèrera les cas :  $a = 0$ ,  $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ ,  $a = 1$ ,  $a > 1$ . [S]
3. Montrer que  $\Gamma_a$  admet un point stationnaire si  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , pour la valeur  $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .  
Étudier la nature de ce point stationnaire. [S]
4. (a) Indiquer les asymptotes horizontales ou verticales éventuelles des courbes  $\Gamma_a$ . [S]  
(b) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand  $t$  tend vers 1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette asymptote, ce qui conduira à considérer les cas  $0 \leq a < 3/4$ ,  $a = 3/4$  et  $a > 3/4$ . [S]  
(c) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand  $t$  tend vers  $-1$ . On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette asymptote. [S]
5. (a) Montrer que  $\Gamma_a$  n'admet de point double que si  $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$ . [S]  
(b) Donner un paramétrage du lieu décrit par ce point double quand  $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$ . [S]
6. (a) Montrer qu'une droite du plan rencontre  $\Gamma_a$  en au plus trois points. [S]  
(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant les fonctions symétriques élémentaires de  $t_1, t_2, t_3$ , pour que  $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$  soient alignés sur  $\Gamma_a$ . [S]  
(c) On suppose que la tangente au point  $M(t)$  de  $\Gamma_a$  recoupe  $\Gamma_a$  en  $M(t')$ .  
Exprimer  $t'$  en fonction de  $t$ . Que se passe-t-il si  $t = \frac{1}{2a}$ ? [S]  
(d) Déterminer combien chaque courbe  $\Gamma_a$  possède de points d'inflexion. [S]
7. Tracer les courbes  $\Gamma_a$  quand  $a \in \{0, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{12}{13}, 1, 2\}$ . [S]

**Corrigé du problème**

1. Notons  $M_a(t) = \left( \frac{1}{t(t^2-1)}, \frac{t(t-a)}{t^2-1} \right)$  le point de paramètre  $t$  de la courbe  $\Gamma_a$ .

On constate que  $M_{-a}(-t)$  et  $M_a(t)$  ont même ordonnée et des abscisses opposées.

La courbe  $\Gamma_{-a}$  se déduit donc de  $\Gamma_a$  par la symétrie orthogonale par rapport à  $Oy$ . [Q]

2. (a) Si  $a > 0$ , il n'y a pas de réduction évidente du domaine d'étude  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

Si  $a = 0$ , les points  $M_0(t)$  et  $M_0(-t)$  sont symétriques par rapport à  $Oy$  (c'est un cas particulier de la symétrie qui échange les courbes  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_{-a}$ .)

Si  $a = 0$  on peut donc limiter l'étude à  $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ . [Q]

$$(b) \text{ On a } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow (-1)^-} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow (-1)^-} y_a(t) = +\infty \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow (-1)^+} x(t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow (-1)^+} y_a(t) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{De même } \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow 0^-} y_a(t) = 0^-, \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow 0^+} y_a(t) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } a > 0 \\ 0^- & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = +\infty \end{cases}, \lim_{t \rightarrow 1^-} y_a(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}, \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1^+} y_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ -\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Enfin  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_a(t) = 1$ . Le point  $(0, 1)$  est donc un "point-limite".

Plus précisément,  $\frac{y_a(t) - 1}{x(t)} = t(1 - at)$  tend vers  $\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ . On en déduit la présence d'une tangente verticale au point-limite. [Q]

- (c) Pour tout  $a \geq 0$  et tout  $t$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ , on trouve :

$$x'(t) = \frac{1 - 3t^2}{t^2(t^2 - 1)^2}, \text{ nul pour } t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ strictement positif si } |t| < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$y'_a(t) = \frac{(2t - a)(t^2 - 1) - (t^2 - at)(2t)}{(t^2 - 1)^2} = \frac{at^2 - 2t + a}{(t^2 - 1)^2}.$$

Pour trouver le signe de  $y'_a(t)$  par intervalles, on discute suivant les valeurs de  $a$ .

Tout d'abord, si  $a = 0$ , on a  $y'_a(t) = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}$ , nul en 0, négatif sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Supposons donc  $a > 0$ . Le discriminant de  $P_a(t) = at^2 - 2t + a$  est  $\Delta' = 1 - a^2$ .

$$- \text{ Si } 0 < a < 1, P_a(t) \text{ s'annule en } t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} \text{ et } t_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \text{ (} t_1 < t_2 \text{)}$$

$P_a$  est strictement négatif sur  $]t_1, t_2[$  et strictement positif si  $t \notin [t_1, t_2]$ .

Pour le tableau des variations, il faut placer  $t_1$  et  $t_2$  par rapport à  $-1, 0, 1$ .

On voit que  $P_a(-1) = 2(a + 1) > 0$ ,  $P_a(0) = a > 0$ , et  $P_a(1) = 2(a - 1) < 0$ .

On en déduit les inégalités  $-1 < 0 < t_1 < 1 < t_2$ .

Il faut également placer  $t_1, t_2$  par rapport à  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ , valeurs qui annulent  $x'(t)$ .

$$\text{Pour } -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ c'est évident. Sinon } P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

La valeur  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  étant bien sûr dans  $]0, 1[$ , on distingue trois cas :

- Si  $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , alors  $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$  donc  $t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_2$ .  
 Dans le tableau des variations, on verra :  $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2$ .
  - Si  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , alors  $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$  donc  $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (ici  $t_2 = \sqrt{3}$ ).  
 On a alors les inégalités :  $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2 = \sqrt{3}$ .
  - Si  $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ , alors  $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$  donc  $\frac{\sqrt{3}}{3} \notin [t_1, t_2]$ .  
 On a alors les inégalités :  $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_1 < 1 < t_2$ .
- Si  $a = 1$ , on trouve  $y_a(t) = \frac{t}{t+1}$  et  $y'_a(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0$ .  
 Dans ce cas, on prolonge  $y_a$  et  $y'_a$  en  $t = 1$  par les valeurs  $y_a(1) = \frac{1}{2}$  et  $y'_a(1) = \frac{1}{4}$ .
- Si  $a > 1$ ,  $y'_a(t) = \frac{at^2 - 2t + a}{(t^2 - 1)^2}$  ne s'annule pas, et reste  $> 0$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

Dans tous les cas, on connaît donc le signe de  $x'(t)$  et de  $y'_a(t)$  par intervalles. On en déduit le sens de variation des applications  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y_a(t)$ . [Q]

(d) Voici le tableau des variations pour  $a = 0$ .

$t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$				
$x'(t)$		+	0	+				-
$x(t)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$	$+\infty$			0
$y(t)$	0		$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$+\infty$			1
$y'(t)$		-		-				-

Voici le tableau des variations pour  $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$t$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$t_1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$t_2$	$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+	+	0	-	-	-
$x(t)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$y(t)$	1	$+\infty$		0			$-\infty$	$+\infty$	1
$y'(t)$		+	+	+	0	-	-	-	0

Voici le tableau des variations pour  $a = \sqrt{3}/2$ .

$t$	$-\infty$	$-1$	$-\sqrt{3}/3$	$0$	$t_1 = \sqrt{3}/3$	$1$	$t_2 = \sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-	-
$x(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 3\sqrt{3}/2$	$+\infty$		$-\infty \rightarrow -3\sqrt{3}/2$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow \sqrt{3}/6$	$0$
$y(t)$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -5/4$	$0$	$0 \rightarrow 1/4$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow 3/4$	$1$
$y'(t)$	+	+	+	+	+	0	-	-

Voici le tableau des variations pour  $\sqrt{3}/2 < a < 1$ .

$t$	$-\infty$	$-1$	$-\sqrt{3}/3$	$0$	$\sqrt{3}/3$	$t_1$	$1$	$t_2$	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-	-	-
$x(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 3\sqrt{3}/2$	$+\infty$		$-\infty \rightarrow -3\sqrt{3}/2$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	
$y(t)$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1/4$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow 1$		
$y'(t)$	+	+	+	+	+	0	-	-	+

Voici le tableau des variations pour  $a = 1$ .

$t$	$-\infty$	$-1$	$-\sqrt{3}/3$	$0$	$\sqrt{3}/3$	$1$	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-
$x(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 3\sqrt{3}/2$	$+\infty$		$-\infty \rightarrow -3\sqrt{3}/2$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow 0$
$y(t)$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow (\sqrt{3}+1)/2$	$0$	$0 \rightarrow (\sqrt{3}-1)/2$	$1/2$	$1$	
$y'(t)$	+	+	+	+	+	+	

Voici le tableau des variations pour  $a > 1$ .

$t$	$-\infty$	$-1$	$-\sqrt{3}/3$	$0$	$\sqrt{3}/3$	$1$	$+\infty$	
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-	-
$x(t)$	0 ↘ -∞	+∞ ↘ $3\sqrt{3}/2$	↗ +∞		-∞ ↗ $-3\sqrt{3}/2$	↘ -∞	+∞ ↘ 0	
$y(t)$	1 ↗ +∞	-∞ ↗ 0		0		↗ +∞	-∞ ↗ 1	
$y'(t)$	+	+	+	+	+	+	+	

[Q]

3. L'étude précédente montre que  $\Gamma_a$  a un point stationnaire si  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , pour  $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Pour le décrire, on peut effectuer un développement limité de  $t \mapsto x(t)$  et de  $t \mapsto y_a(t)$  au voisinage de  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , donc au voisinage de 0 après avoir posé  $t = \frac{\sqrt{3}}{3} + h$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 - 1} &= \frac{1}{-\frac{2}{3} + 2h\frac{\sqrt{3}}{3} + h^2} = \frac{-3}{2\left(1 - \left(h\sqrt{3} + \frac{3}{2}h^2\right)\right)} \\ &= -\frac{3}{2} \left(1 + \left(h\sqrt{3} + \frac{3}{2}h^2\right) + \left(3h^2 + 3\sqrt{3}h^3\right) + \left(3\sqrt{3}h^3\right)\right) \\ &= -\frac{3}{2} \left(1 + \sqrt{3}h + \frac{9}{2}h^2 + 6\sqrt{3}h^3 + o(h^3)\right) \end{aligned}$$

$$\text{De même } \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}h} = \sqrt{3} \left(1 - \sqrt{3}h + 3h^2 - 3\sqrt{3}h^3 + o(h^3)\right).$$

Ainsi :

$$x(t) = \frac{1}{t(t^2 - 1)} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{9}{2}h^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}h^3 + o(h^3)\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{4}h^2 - \frac{27}{4}h^3 + o(h^3).$$

$$\text{On remarque ensuite que } y_a(t) = \frac{t(t-a)}{t^2-1} = 1 + \frac{1-at}{t^2-1} = 1 + \frac{1-\sqrt{3}h}{2(t^2-1)}.$$

On en déduit :

$$y_a(t) = 1 - \frac{3}{4}(1 - \sqrt{3}h) \left(1 + \sqrt{3}h + \frac{9}{2}h^2 + 6\sqrt{3}h^3 + o(h^3)\right) = \frac{1}{4} - \frac{9}{8}h^2 - \frac{9\sqrt{3}}{8}h^3 + o(h^3)$$

$$\text{Pour } a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ soit } M(t_0) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right), U = \frac{9}{8} \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \frac{9}{8} \begin{pmatrix} -6 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a donc obtenu : } M(t) = M(t_0) + h^2U + h^3V + \vec{o}(h^3)$$

Le vecteur  $U$  dirige la tangente à l'arc en  $M(t_0)$ , et  $U, V$  sont libres.

Dans le repère  $(M(t_0), U, V)$  les coordonnées  $X(t), Y(t)$  de  $M(t)$  vérifient  $\begin{cases} X(t) \sim (t - t_0)^2 \\ Y(t) \sim (t - t_0)^3 \end{cases}$

Cela signifie que  $\Gamma_a$  présente en  $M(t_0)$  un rebroussement de première espèce.

Il y a une autre méthode, qui consiste à calculer les dérivées successives (jusqu'à la troisième) des applications  $x \mapsto x(t)$  et  $y \mapsto y_a(t)$ , et de les évaluer en  $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .