

Une famille d'arcs paramétrés

Pour tout réel a , on considère l'arc de \mathbb{R}^2 paramétré par $x(t) = \frac{1}{t(t^2 - 1)}$ et $y_a(t) = \frac{t(t - a)}{t^2 - 1}$.

On note Γ_a la courbe représentative de cet arc.

1. Montrer que Γ_{-a} se déduit de Γ_a par une transformation géométrique simple.
Dans toute la suite, on se limitera donc à la condition $a \geq 0$. [S]
2. (a) Préciser le domaine d'étude de l'arc Γ_a . [S]
(b) Indiquer les limites de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y_a(t)$ aux bornes du domaine d'étude. [S]
(c) Préciser le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ par intervalles.
On sera notamment amené à distinguer les cas $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$.
Si $0 < a < 1$, on placera les racines $t_1 < t_2$ de $y'(t)$ par rapport à $-1, 0, 1$. [S]
(d) Dresser les tableaux de variations des arcs Γ_a en discutant suivant les valeurs de a .
On considèrera les cas : $a = 0$, $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$. [S]
3. Montrer que Γ_a admet un point stationnaire si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour la valeur $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Étudier la nature de ce point stationnaire. [S]
4. (a) Indiquer les asymptotes horizontales ou verticales éventuelles des courbes Γ_a . [S]
(b) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers 1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette asymptote, ce qui conduira à considérer les cas $0 \leq a < 3/4$, $a = 3/4$ et $a > 3/4$. [S]
(c) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers -1 . On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette asymptote. [S]
5. (a) Montrer que Γ_a n'admet de point double que si $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$. [S]
(b) Donner un paramétrage du lieu décrit par ce point double quand $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$. [S]
6. (a) Montrer qu'une droite du plan rencontre Γ_a en au plus trois points. [S]
(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant les fonctions symétriques élémentaires de t_1, t_2, t_3 , pour que $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ soient alignés sur Γ_a . [S]
(c) On suppose que la tangente au point $M(t)$ de Γ_a recoupe Γ_a en $M(t')$.
Exprimer t' en fonction de t . Que se passe-t-il si $t = \frac{1}{2a}$? [S]
(d) Déterminer combien chaque courbe Γ_a possède de points d'inflexion. [S]
7. Tracer les courbes Γ_a quand $a \in \{0, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{12}{13}, 1, 2\}$. [S]

Corrigé du problème

1. Notons $M_a(t) = \left(\frac{1}{t(t^2-1)}, \frac{t(t-a)}{t^2-1} \right)$ le point de paramètre t de la courbe Γ_a .

On constate que $M_{-a}(-t)$ et $M_a(t)$ ont même ordonnée et des abscisses opposées.

La courbe Γ_{-a} se déduit donc de Γ_a par la symétrie orthogonale par rapport à Oy . [Q]

2. (a) Si $a > 0$, il n'y a pas de réduction évidente du domaine d'étude $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Si $a = 0$, les points $M_0(t)$ et $M_0(-t)$ sont symétriques par rapport à Oy (c'est un cas particulier de la symétrie qui échange les courbes Γ_a et Γ_{-a} .)

Si $a = 0$ on peut donc limiter l'étude à $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. [Q]

$$(b) \text{ On a } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow (-1)^-} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow (-1)^-} y_a(t) = +\infty \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow (-1)^+} x(t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow (-1)^+} y_a(t) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{De même } \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow 0^-} y_a(t) = 0^-, \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow 0^+} y_a(t) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } a > 0 \\ 0^- & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = +\infty \end{cases}, \lim_{t \rightarrow 1^-} y_a(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}, \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1^+} y_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ -\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Enfin $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} y_a(t) = 1$. Le point $(0, 1)$ est donc un "point-limite".

Plus précisément, $\frac{y_a(t) - 1}{x(t)} = t(1 - at)$ tend vers ∞ quand $t \rightarrow \infty$. On en déduit la présence d'une tangente verticale au point-limite. [Q]

- (c) Pour tout $a \geq 0$ et tout t de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on trouve :

$$x'(t) = \frac{1 - 3t^2}{t^2(t^2 - 1)^2}, \text{ nul pour } t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ strictement positif si } |t| < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$y'_a(t) = \frac{(2t - a)(t^2 - 1) - (t^2 - at)(2t)}{(t^2 - 1)^2} = \frac{at^2 - 2t + a}{(t^2 - 1)^2}.$$

Pour trouver le signe de $y'_a(t)$ par intervalles, on discute suivant les valeurs de a .

Tout d'abord, si $a = 0$, on a $y'_a(t) = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}$, nul en 0, négatif sur \mathbb{R}^{+*} .

Supposons donc $a > 0$. Le discriminant de $P_a(t) = at^2 - 2t + a$ est $\Delta' = 1 - a^2$.

– Si $0 < a < 1$, $P_a(t)$ s'annule en $t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$ et $t_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$ ($t_1 < t_2$)

P_a est strictement négatif sur $]t_1, t_2[$ et strictement positif si $t \notin [t_1, t_2]$.

Pour le tableau des variations, il faut placer t_1 et t_2 par rapport à $-1, 0, 1$.

On voit que $P_a(-1) = 2(a + 1) > 0$, $P_a(0) = a > 0$, et $P_a(1) = 2(a - 1) < 0$.

On en déduit les inégalités $-1 < 0 < t_1 < 1 < t_2$.

Il faut également placer t_1, t_2 par rapport à $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, valeurs qui annulent $x'(t)$.

Pour $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ c'est évident. Sinon $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ étant bien sûr dans $]0, 1[$, on distingue trois cas :

- Si $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$ donc $t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_2$.
 Dans le tableau des variations, on verra : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2$.
 - Si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$ donc $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ici $t_2 = \sqrt{3}$).
 On a alors les inégalités : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2 = \sqrt{3}$.
 - Si $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, alors $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$ donc $\frac{\sqrt{3}}{3} \notin [t_1, t_2]$.
 On a alors les inégalités : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_1 < 1 < t_2$.
- Si $a = 1$, on trouve $y_a(t) = \frac{t}{t+1}$ et $y'_a(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0$.
 Dans ce cas, on prolonge y_a et y'_a en $t = 1$ par les valeurs $y_a(1) = \frac{1}{2}$ et $y'_a(1) = \frac{1}{4}$.
- Si $a > 1$, $y'_a(t) = \frac{at^2 - 2t + a}{(t^2 - 1)^2}$ ne s'annule pas, et reste > 0 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Dans tous les cas, on connaît donc le signe de $x'(t)$ et de $y'_a(t)$ par intervalles. On en déduit le sens de variation des applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y_a(t)$. [Q]

(d) Voici le tableau des variations pour $a = 0$.

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$					
$x'(t)$		+	0	+				-	
$x(t)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$y(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$y'(t)$		-	-	-	-	-	-	-	

Voici le tableau des variations pour $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

t	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	t_1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	t_2	$+\infty$	
$x'(t)$	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$x(t)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$y(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$y'(t)$	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+

Voici le tableau des variations pour $a = \sqrt{3}/2$.

t	$-\infty$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$t_1 = \sqrt{3}/3$	1	$t_2 = \sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-	-
$x(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 3\sqrt{3}/2$	$+\infty$		$-\infty \rightarrow -3\sqrt{3}/2$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow \sqrt{3}/6$	0
$y(t)$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -5/4$		$0 \rightarrow 1/4$		$-\infty$	$+\infty \rightarrow 3/4$	1
$y'(t)$	+	+	+	+	+	0	-	-

Voici le tableau des variations pour $\sqrt{3}/2 < a < 1$.

t	$-\infty$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	t_1	1	t_2	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-	-	-
$x(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 3\sqrt{3}/2$	$+\infty$		$-\infty \rightarrow -3\sqrt{3}/2$	$-\infty$	$+\infty$	0	
$y(t)$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty$		$0 \rightarrow$		$-\infty$	$+\infty$	1	
$y'(t)$	+	+	+	+	+	0	-	-	+

Voici le tableau des variations pour $a = 1$.

t	$-\infty$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-
$x(t)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 3\sqrt{3}/2$	$+\infty$		$-\infty \rightarrow -3\sqrt{3}/2$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow 0$
$y(t)$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow (\sqrt{3}+1)/2$		$0 \rightarrow (\sqrt{3}-1)/2$		$1/2$	1
$y'(t)$	+	+	+	+	+	+	+

Voici le tableau des variations pour $a > 1$.

t	$-\infty$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$+\infty$	
$x'(t)$	-	-	0	+	+	0	-	-
$x(t)$	0 ↘ -∞	+∞ ↘ $3\sqrt{3}/2$	↗ +∞	-∞ ↗ $-3\sqrt{3}/2$	↘ -∞	+∞ ↘ 0		
$y(t)$	1 ↗ +∞	-∞ ↗ 0				↗ +∞	-∞ ↗ 1	
$y'(t)$	+	+	+	+	+	+	+	

[Q]

3. L'étude précédente montre que Γ_a a un point stationnaire si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pour le décrire, on peut effectuer un développement limité de $t \mapsto x(t)$ et de $t \mapsto y_a(t)$ au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc au voisinage de 0 après avoir posé $t = \frac{\sqrt{3}}{3} + h$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 - 1} &= \frac{1}{-\frac{2}{3} + 2h\frac{\sqrt{3}}{3} + h^2} = \frac{-3}{2\left(1 - \left(h\sqrt{3} + \frac{3}{2}h^2\right)\right)} \\ &= -\frac{3}{2} \left(1 + \left(h\sqrt{3} + \frac{3}{2}h^2\right) + \left(3h^2 + 3\sqrt{3}h^3\right) + \left(3\sqrt{3}h^3\right)\right) \\ &= -\frac{3}{2} \left(1 + \sqrt{3}h + \frac{9}{2}h^2 + 6\sqrt{3}h^3 + o(h^3)\right) \end{aligned}$$

$$\text{De même } \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}h} = \sqrt{3} \left(1 - \sqrt{3}h + 3h^2 - 3\sqrt{3}h^3 + o(h^3)\right).$$

Ainsi :

$$x(t) = \frac{1}{t(t^2 - 1)} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{9}{2}h^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}h^3 + o(h^3)\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{4}h^2 - \frac{27}{4}h^3 + o(h^3).$$

$$\text{On remarque ensuite que } y_a(t) = \frac{t(t-a)}{t^2-1} = 1 + \frac{1-at}{t^2-1} = 1 + \frac{1-\sqrt{3}h}{2(t^2-1)}.$$

On en déduit :

$$y_a(t) = 1 - \frac{3}{4}(1 - \sqrt{3}h) \left(1 + \sqrt{3}h + \frac{9}{2}h^2 + 6\sqrt{3}h^3 + o(h^3)\right) = \frac{1}{4} - \frac{9}{8}h^2 - \frac{9\sqrt{3}}{8}h^3 + o(h^3)$$

$$\text{Pour } a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ soit } M(t_0) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right), U = \frac{9}{8} \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \frac{9}{8} \begin{pmatrix} -6 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a donc obtenu : } M(t) = M(t_0) + h^2U + h^3V + \vec{o}(h^3)$$

Le vecteur U dirige la tangente à l'arc en $M(t_0)$, et U, V sont libres.

$$\text{Dans le repère } (M(t_0), U, V) \text{ les coordonnées } X(t), Y(t) \text{ de } M(t) \text{ vérifient } \begin{cases} X(t) \sim (t - t_0)^2 \\ Y(t) \sim (t - t_0)^3 \end{cases}$$

Cela signifie que Γ_a présente en $M(t_0)$ un rebroussement de première espèce.

Il y a une autre méthode, qui consiste à calculer les dérivées successives (jusqu'à la troisième) des applications $x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y_a(t)$, et de les évaluer en $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.