SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

<u>Plan</u> *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

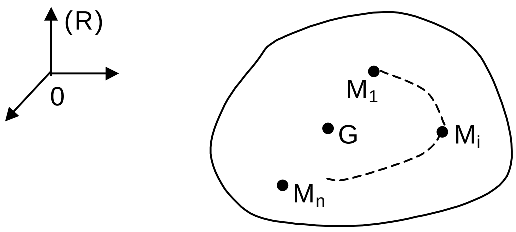
****

****

I. Théorèmes généraux (en référentiel galiléen).

On considère un système de n points matériels M_i de masse m_i, en mouvement par rapport à (R) galiléen.

I.1. Théorème du centre de masse (TCM).



Le centre de masse (ou d'inertie) G du système est le barycentre des (M_i, m_i) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n m_i \overrightarrow{OM_i}}{m} \quad \left(m = \sum_{i=1}^n m_i\right) \qquad \left(\text{ou : } \sum_1^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{O}\right)$$

Appliquons la RFD au point M_i :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \underbrace{\vec{f}_i\ (ext)}_{\substack{\text{somme des forces} \\ \text{exercées sur } M_i \\ \text{par des points} \\ \underline{\text{extérieurs}} \text{ au système}}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j \to i}}}_{\substack{\text{forces exercées} \\ \text{par } M_{j \neq i}}}$$

En sommant les RFD appliquées à chaque point M_i, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{m\,\overrightarrow{a_G}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{f}_i\ (ext)}_{\overrightarrow{F_{ext}}} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j \to i}} \right)$$

(résultante des forces <u>extérieures</u> au système)

D'après le principe des actions réciproques :

$$\overrightarrow{f_{j \to i}} = - \overrightarrow{f_{i \to j}} \quad , \quad \text{donc :}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j \to i}} \right) = \vec{O}$$

Ainsi : $\boxed{m\,\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{F_{ext}}}$ (TCM ou TCI)

Pour un système isolé : $\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{a_G} = \vec{O}$: <u>G est en T R U</u>

I.2. Théorème du moment cinétique.

Le moment cinétique en A du système matériel, évalué dans (R), défini par :

$$\vec{\sigma}(A) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\,\overrightarrow{v_i}$$

Alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\,\overrightarrow{a_i} + \sum_i \left(\overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_A}\right) \wedge m_i\,\overrightarrow{v_i}$$

Avec :

$$m_i\,\overrightarrow{a_i} = \vec{f_i}\,(ext) + \underbrace{\sum_{j\neq i} \overrightarrow{f_{j\rightarrow i}}}_{\vec{f_i}\,(int)}$$

On peut montrer que :

$$\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(\sum_{j\neq i} \overrightarrow{f_{j\rightarrow i}}\right) = \vec{O}$$ (d'après le principe des actions réciproques).

Ainsi :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{m}^{\,t}(A)\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) - \overrightarrow{v_A} \wedge m\,\overrightarrow{v_G}}$$ (TMC en A)

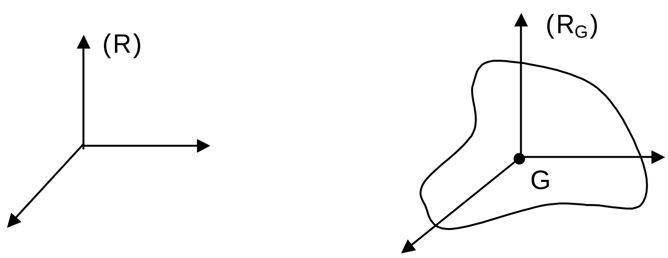
En particulier, si A est fixe, ou A=G :

$$\overrightarrow{v_A} \wedge m\,\overrightarrow{v_G} = \vec{O}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{m}^{\,t}(G)\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$ (TMC en G)

<u>Rem. 1</u> : il faut prendre garde à ne pas écrire : $\vec{\sigma}(A) = \overrightarrow{AG} \wedge m\,\overrightarrow{v_G}$

En effet, si (R_G) est le référentiel barycentrique du système :



$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_i}^{\,*} + \overrightarrow{v_G}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\sigma}(A) = \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v_i}}_{\vec{\sigma}^*(A)} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v_G}}_{\overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v_G}} \\ \vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}^*(G) = \vec{\sigma}^*(A) = \vec{\sigma}^* \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}^*}_{} + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v_G}}$$

moment cinétique barycentrique

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Koenig pour le moment cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

Rem. 2 : d'après la remarque 1 :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{m}^{\,t}(G) \left(\sum \overrightarrow{F_{ext}} \right)}$$

(TMC en G dans (R_G), appelé aussi TMC barycentrique).

Rem. 3 : Pour un système <u>isolé</u> :

$$\begin{cases} \underline{\vec{\sigma}^* = \overrightarrow{cste}} \\ \text{et} \quad \underline{\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{cste} \ , \ \text{si } 0 \text{ fixe}} \end{cases}$$

I.3. Théorèmes énergétiques.

On peut écrire : $\quad m_i \dfrac{d\vec{v_i}}{dt} = \underbrace{\vec{f_i}\ (\text{int} + \text{ext})}_{}$

Somme de toutes les forces exercées sur M_i, intérieures et extérieures au système

D'où : $\quad m_i \vec{v_i} \cdot \dfrac{d\vec{v_i}}{dt} = \vec{f_i}\ (\text{int} + \text{ext}) \cdot \vec{v_i}$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i} \cdot \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i}\ (\text{int} + \text{ext}) \cdot \vec{v_i}$$

Or : $\quad \boxed{E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2}$

Donc on obtient : $\quad \boxed{\frac{dE_C}{dt} = \underbrace{P\ (\text{int} + \text{ext})}_{}} \quad$ (TPC)

Puissance de <u>toute</u>s les forces (int + ext) exercées sur le système

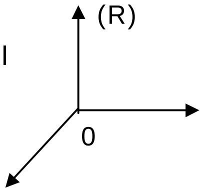
$$\boxed{\begin{array}{l} dE_C = \delta W\ (\text{int} + \text{ext}) \\ \Delta E_C = W\ (\text{int} + \text{ext}) \end{array}} \quad \text{(TEC)}$$

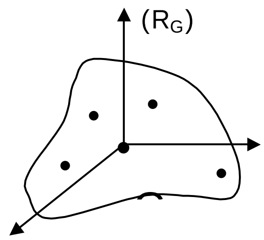
Enfin, en posant : $E_m = E_C + \underbrace{E_P \text{ (int + ext)}}_{\text{Energie potentielle dont dérive toutes les forces exercées sur les divers } M_i}$

$$\boxed{dE_m = \delta W_{NC} \text{ (int + ext)}} \qquad \text{(TEM)}$$

__Rem. 1__ : il faut prendre garde à ne pas écrire que $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2$

En effet, si (R_G) est le référentiel barycentrique du système :





$$\vec{v_i} = \vec{v_i}\,^* + \vec{v_G}$$

Donc
$$E_C = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}\left(\vec{v_i}\,^* + \vec{v_G}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad E_C = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^{2*}}_{E_C^*} + \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \underbrace{\left(\sum m_i\, \vec{v_i}\,^*\right)}_{m\,\vec{v_G}\,^* = \vec{O}} . \vec{v_G}$$

Finalement : $\boxed{E_C = E_C^* + \frac{1}{2}\, m v_G^2}$: ce résultat, connu sous le nom de théorème de Koenig pour l'énergie cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

__Rem. 2__ : pour un système de n points :

$\underline{\sum \vec{F}\text{(int)} = \vec{O}}$, mais $\underline{\delta W \text{ (int)} \neq 0}$

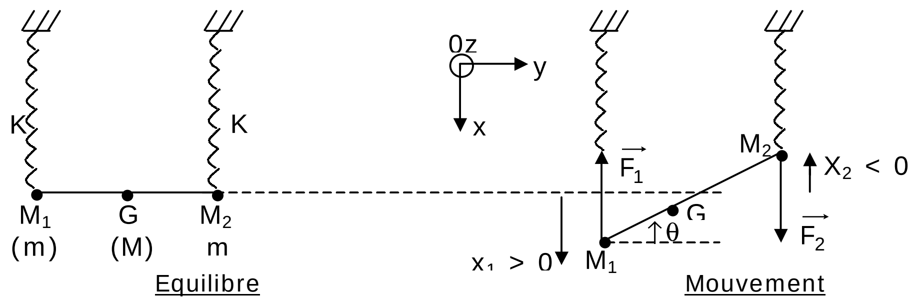
En effet, pour 2 points i et j :

$$\delta W \text{ (int)} = \vec{f_{i\to j}} . \vec{v_j}\, dt + \vec{f_{j\to i}} . \vec{v_i}\, dt$$

$\vec{f_{i\to j}} = - \vec{f_{j\to i}}$, donc :

$$\delta W \text{ (int)} = \vec{f_{i\to j}} .(\vec{v_j} - \vec{v_i})\, dt \neq 0$$

I.4. __Exemple__ : couplage par inertie de deux pendules élastiques



- TCM au système $\{M_1, M_2\}$, en projection sur $\vec{x}$:

$$(2m + M)\,\ddot{x}_G = -K x_1 - K x_2$$

(Les poids compensent les tensions à l'équilibre, et n'interviennent pas dans l'équation du mouvement, si on compte x_1 et x_2 par rapport à l'équilibre).

Avec $x_G = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, on obtient la 1[ère] équation :

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{-K}{m + M/2}(x_1 + x_2)} \qquad (1)$$

- TMC barycentrique au système $\{M_1, M_2\}$, en projection sur $\vec{y}$

$$\frac{d\sigma_z^*}{dt} = (\overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{F_2}).\vec{z}$$

$$= -K x_1 \frac{\ell}{2}\cos\theta + K x_2 \frac{\ell}{2}\cos\theta$$

Avec :

$$\vec{\sigma}^* = (\overrightarrow{GM_1} \wedge m\,\vec{v_1}^*) + (\overrightarrow{GM_2} \wedge m\,\vec{v_2}^*)$$

$$\sigma_z^* = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \dot{\theta} = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}$$

De plus :

$$\sin\theta = \frac{x_1 - x_2}{\ell}$$

Pour de petites oscillations du système :

$$\begin{cases} \cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx \theta \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{ml}{2}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \approx -K(x_1 - x_2)\frac{l}{2}$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{-K}{m}(x_1 - x_2)}$$

Posons $\boxed{\omega_1^2 = \dfrac{K}{m + M/2}}$ et $\boxed{\omega_2^2 = \dfrac{K}{m}}$

Alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_1 - x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

α_1, α_2, φ_1 et φ_2 sont donnés par les conditions initiales x_{10}, x_{20}, $\dot{x}_{10}$ et $\dot{x}_{20}$.

On voit donc que x_1 et x_2 sont des combinaisons linéaires de 2 « modes propres » d'oscillation, l'un à la pulsation ω_1, l'autre à la pulsation ω_2.
ω_1 et ω_2 sont appelées pulsations propres du système couplé.

- Si $x_{10} = x_{20} = x_0$; $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

On trouve : $\quad x_1(t) = x_2(t) = x_0 \cos \omega_1 t$, $\quad \forall t$

Les 2 éléments oscillent en phase à la pulsation ω_1.

- Si $x_{10} = - x_{20} = x_0$; $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

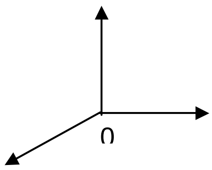
On trouve : $\quad x_1(t) = - x_2(t) = x_0 \cos \omega_2 t$, $\quad \forall t$

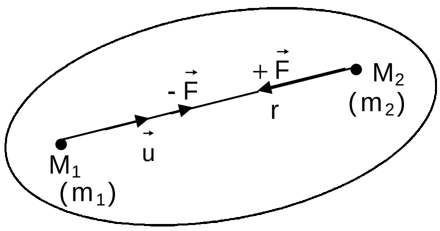
Les 2 éléments oscillent en opposition de phase à la pulsation ω_2.

II. Cas particulier : système isolé de deux points matériels en interaction.

II.1. Etude générale.

(R) galiléen





Système <u>isolé</u>

On considère le système $\{M_1, M_2\}$ isolé.

On pose $M_1M_2 = r$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} = r\,\vec{u}$

On suppose que les deux points sont en interaction par l'intermédiaire d'une force ne dépendant que de r :

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \vec{F}(r) = F(r)\ \vec{u}$$

$$\overrightarrow{F_{2\to 1}} = - \vec{F}(r)$$

($F(r) > 0$: répulsion ; $F(r) < 0$: attraction)

Soit G le centre d'inertie du système.

Il est défini par : $\quad m_1\,\overrightarrow{GM_1} + m_2\,\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

Par application du TCM au système, dans (R) galiléen, on a :

$$(m_1 + m_2)\,\overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$

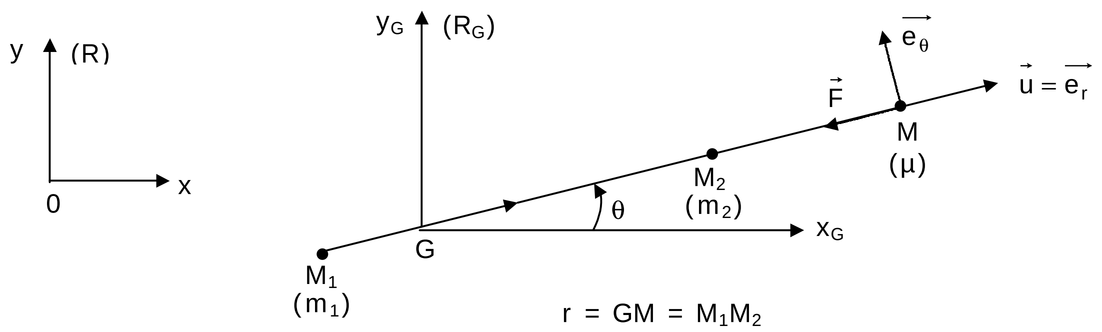
Donc $\quad \overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste} \quad$: $\quad$ <u>(R_G) est alors galiléen</u>

<u>L'étude du système se fera alors dans (R_G)</u>.

Soit un point M, appelé « <u>mobile fictif</u> » (ou « particule réduite ») tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} \\ \text{M a pour masse } \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(masse réduite)} \\ \text{M est soumis à } \vec{F} = F(r)\,\vec{u} \end{cases}$$

Dans (R_G), M est donc soumis à la force centrale $\vec{F}$. Toutes les propriétés vues dans le chapitre VIII s'appliquent alors.
En particulier, si la force est newtonienne, M décrit dans (R_G) une conique dont G est un foyer, selon la loi des aires.



Par application de la RFD, ou du TEM, on connaît donc $\overrightarrow{GM} = \vec{r}$.

Puis :
$$\begin{cases} m_1\,\overrightarrow{GM_1} + m_2\,\overrightarrow{GM_2} = 0 \\ \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GM_1} = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r} \\ \overrightarrow{GM_2} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r} \end{cases}$$

La connaissance de $\overrightarrow{GM}$ permet donc ensuite de déterminer $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ (trajectoires de M_1 et M_2 dans (R_G)).
Mais nous avons vu en VII que les équations du mouvement de M dans (R_G) font intervenir 2 grandeurs constantes, déterminées par exemple à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}^*(M) = \sigma_O^* & \text{moment cinétique barycentrique du point M} \\ E^* = E_O^* & \text{énergie barycentrique du point M} \end{cases}$$

Montrons que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\sigma}^*(M) = \vec{\sigma}^*\ \{M_1 + M_2\} \\ E_C^*(M) = E_C^*\ \{M_1 + M_2\} \end{array}}$$