

## SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

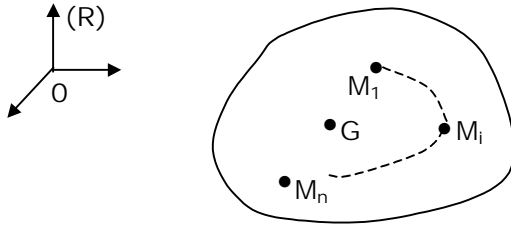
I.	Théorèmes généraux (en référentiel galiléen).....	1
II.	Cas particulier : système isolé de deux points matériels en interaction.....	6
III.	Choc de deux points matériels.....	15

\*\*\*\*\*

### I. Théorèmes généraux (en référentiel galiléen).

On considère un système de n points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$ , en mouvement par rapport à (R) galiléen.

#### I.1. Théorème du centre de masse (TCM).



Le centre de masse (ou d'inertie) G du système est le barycentre des  $(M_i, m_i)$  :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i}{m} \quad (m = \sum_{i=1}^n m_i) \quad (\text{ou : } \sum_{i=1}^n m_i \vec{GM}_i = \vec{0})$$

Appliquons la RFD au point  $M_i$  :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \underbrace{\vec{f}_i(\text{ext})}_{\substack{\text{somme des forces} \\ \text{exercées sur } M_i \\ \text{par des points} \\ \text{extérieurs au système}}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}}_{\substack{\text{forces exercées} \\ \text{par } M_{j \neq i}}}$$

En sommant les RFD appliquées à chaque point  $M_i$ , on obtient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{m \vec{a}_G} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{f}_i(\text{ext})}_{\vec{F}_{\text{ext}}} + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i} \right)$$

(résultante des forces extérieures au système)

D'après le principe des actions réciproques :

$$\vec{f}_{j \rightarrow i} = - \vec{f}_{i \rightarrow j} \quad , \quad \text{donc :}$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i} \right) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$m \vec{a}_G = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (\text{TCM ou TCI})$$

 Pour un système isolé :  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0}$  : G est en T R U

### 1.2. Théorème du moment cinétique.

Le moment cinétique en A du système matériel, évalué dans (R), défini par :

$$\vec{\sigma}(A) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_i + \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_A) \wedge m_i \vec{v}_i$$

Avec :

$$m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i(\text{ext}) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}}_{\vec{f}_i(\text{int})}$$

On peut montrer que :

$$\sum_i \vec{AM}_i \wedge \left( \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i} \right) = \vec{0} \quad (\text{d'après le principe des actions réciproques}).$$

Ainsi :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{m}^t(A) \left( \sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) - \vec{v}_A \wedge m \vec{v}_G \quad (\text{TMC en A})$$

En particulier, si A est fixe, ou A=G :

$$\vec{v}_A \wedge m \vec{v}_G = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{m}^t(G) \left( \sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) \quad (\text{TMC en G})$$

Rem. 1 : il faut prendre garde à ne pas écrire :  $\vec{\sigma}(A) = \vec{AG} \wedge m \vec{v}_G$

 En effet, si  $(R_G)$  est le référentiel barycentrique du système :


$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\sigma}(A) = \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i}_{\vec{\sigma}^*(A)} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_G}_{\overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_G} \\ \vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}^*(G) = \vec{\sigma}^*(A) = \vec{\sigma}^* \end{cases}$$

Donc :

$$\vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}^*}_{\text{moment cinétique barycentrique}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_G$$

moment cinétique barycentrique

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Koenig pour le moment cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

Rem. 2 : d'après la remarque 1 :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{m}^t(G) \left( \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} \right)$$

(TMC en G dans  $(R_G)$ , appelé aussi TMC barycentrique).

Rem. 3 : Pour un système isolé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma}^* = \text{cste} \\ \text{et } \vec{\sigma}(O) = \text{cste}, \text{ si } O \text{ fixe} \end{array} \right.$$

### 1.3. Théorèmes énergétiques.

On peut écrire :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \underbrace{\vec{f}_i}_{\text{(int + ext)}}$$

Somme de toutes les forces exercées sur  $M_i$ , intérieures et extérieures au système

D'où :

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i \quad (\text{int + ext})$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i \quad (\text{int + ext})$$

Or :

$$E_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Donc on obtient :

$$\frac{dE_C}{dt} = \underbrace{P}_{\text{(int + ext)}} \quad (\text{TPC})$$

Puissance de toutes les forces (int + ext) exercées sur le système

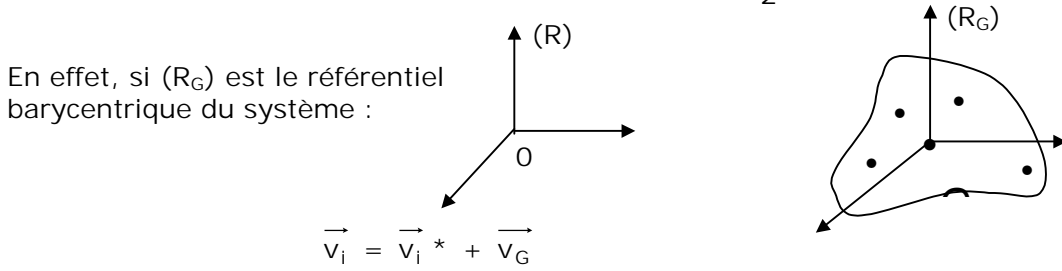
$$\begin{aligned} dE_C &= \delta W \text{ (int + ext)} \\ \Delta E_C &= W \text{ (int + ext)} \end{aligned} \quad (\text{TEC})$$

SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Enfin, en posant :  $E_m = E_C + E_P$  (int + ext)  
 l'énergie potentielle doit dériver toutes  
 les forces exercées sur les divers  $M_i$

$$dE_m = \delta W_{NC} \text{ (int + ext)} \quad \text{(TEM)}$$

Rem. 1 : il faut prendre garde à ne pas écrire que  $E_C = \frac{1}{2} m v_G^2$



$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$$

Donc

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G)^2$$

$$\Rightarrow E_C = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{2*}}_{E_C^*} + \frac{1}{2} m v_G^2 + \underbrace{(\sum m_i \vec{v}_i^*) \cdot \vec{v}_G}_{m \vec{v}_G^* = \vec{0}}$$

Finalement :

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2} m v_G^2$$

: ce résultat, connu sous le nom de théorème de

Koenig pour l'énergie cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

Rem. 2 : pour un système de n points :

$$\sum \vec{F} \text{ (int)} = \vec{0} \quad , \quad \text{mais} \quad \delta W \text{ (int)} \neq 0$$

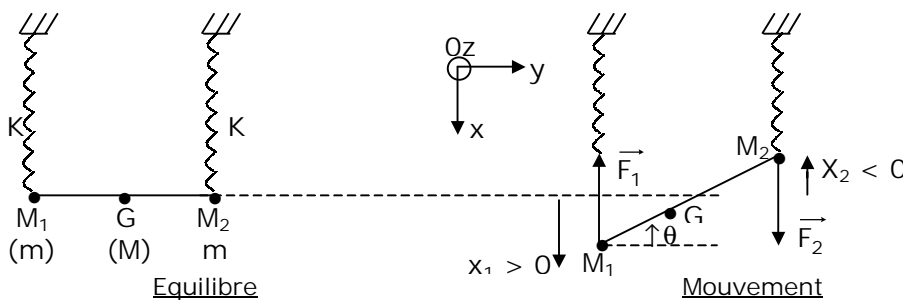
En effet, pour 2 points i et j :

$$\delta W \text{ (int)} = \vec{f}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}_j dt + \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i dt$$

$$\vec{f}_{i \rightarrow j} = - \vec{f}_{j \rightarrow i} \quad , \quad \text{donc :}$$

$$\delta W \text{ (int)} = \vec{f}_{i \rightarrow j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) dt \neq 0$$

**1.4. Exemple** : couplage par inertie de deux pendules élastiques



## SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

- TCM au système  $\{M_1, M_2\}$ , en projection sur  $\vec{x}$  :

$$(2m + M) \overset{\circ\circ}{x}_G = -Kx_1 - Kx_2$$

(Les poids compensent les tensions à l'équilibre, et n'interviennent pas dans l'équation du mouvement, si on compte  $x_1$  et  $x_2$  par rapport à l'équilibre).

Avec  $x_G = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , on obtient la 1<sup>ère</sup> équation :

$$\overset{\circ\circ}{x}_1 + \overset{\circ\circ}{x}_2 = \frac{-K}{m + M/2} (x_1 + x_2) \quad (1)$$

- TMC barycentrique au système  $\{M_1, M_2\}$ , en projection sur  $\vec{y}$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_z^*}{dt} &= (\overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{F_2}) \cdot \vec{z} \\ &= -Kx_1 \frac{\ell}{2} \cos \theta + Kx_2 \frac{\ell}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

Avec :

$$\vec{\sigma}^* = (\overrightarrow{GM_1} \wedge m\vec{v}_1^*) + (\overrightarrow{GM_2} \wedge m\vec{v}_2^*)$$

$$\sigma_z^* = 2m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 \overset{\circ}{\theta} = \frac{m\ell^2}{2} \overset{\circ}{\theta}$$

De plus :

$$\sin \theta = \frac{x_1 - x_2}{\ell}$$

Pour de petites oscillations du système :

$$\begin{cases} \cos \theta \approx 1 \\ \sin \theta \approx \theta \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{m\ell}{2} (\overset{\circ\circ}{x}_1 - \overset{\circ\circ}{x}_2) \approx -K(x_1 - x_2) \frac{1}{2}$$

Soit :

$$\overset{\circ\circ}{x}_1 - \overset{\circ\circ}{x}_2 = \frac{-K}{m} (x_1 - x_2)$$

Posons

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m + M/2} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{K}{m}$$

Alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_1 - x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont donnés par les conditions initiales  $x_{10}, x_{20}, \overset{\circ}{x}_{10}$  et  $\overset{\circ}{x}_{20}$ .

SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

On voit donc que  $x_1$  et  $x_2$  sont des combinaisons linéaires de 2 « modes propres » d'oscillation, l'un à la pulsation  $\omega_1$ , l'autre à la pulsation  $\omega_2$ .

$\omega_1$  et  $\omega_2$  sont appelées pulsations propres du système couplé.

- Si  $x_{10} = x_{20} = x_0$  ;  $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

On trouve :  $x_1(t) = x_2(t) = x_0 \cos \omega_1 t$  ,  $\forall t$

Les 2 éléments oscillent en phase à la pulsation  $\omega_1$ .

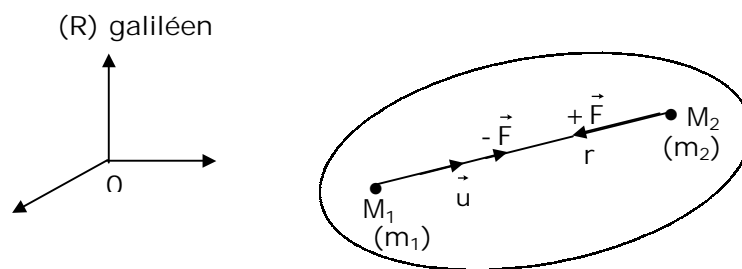
- Si  $x_{10} = -x_{20} = x_0$  ;  $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

On trouve :  $x_1(t) = -x_2(t) = x_0 \cos \omega_2 t$  ,  $\forall t$

Les 2 éléments oscillent en opposition de phase à la pulsation  $\omega_2$ .

**II. Cas particulier : système isolé de deux points matériels en interaction.**

**II.1. Etude générale.**



On considère le système  $\{M_1, M_2\}$  isolé.

On pose  $M_1M_2 = r$  ;  $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} = r\vec{u}$

On suppose que les deux points sont en interaction par l'intermédiaire d'une force ne dépendant que de  $r$  :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{F}(r) = F(r) \vec{u}$$

$$\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -\vec{F}(r)$$

$(F(r) > 0$  : répulsion ;  $F(r) < 0$  : attraction)

Soit G le centre d'inertie du système.

Il est défini par :  $m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

Par application du TCM au système, dans (R) galiléen, on a :

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$

Donc  $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste}$  : (R<sub>G</sub>) est alors galiléen

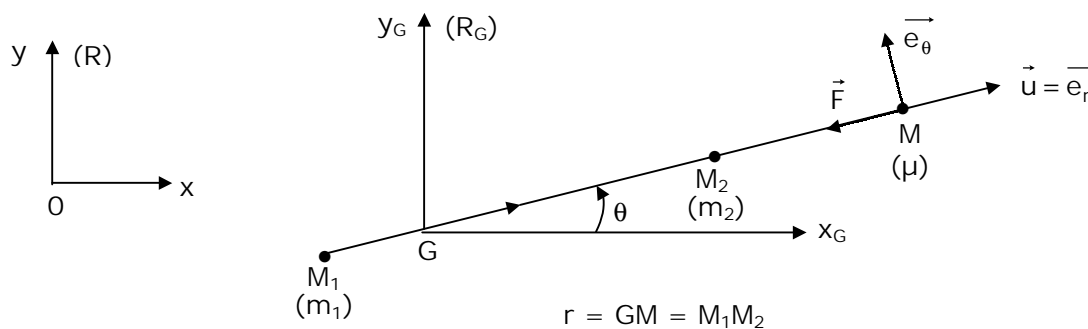
L'étude du système se fera alors dans (R<sub>G</sub>).

Soit un point  $M$ , appelé « mobile fictif » (ou « particule réduite ») tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} \\ M \text{ a pour masse } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{masse réduite}) \\ M \text{ est soumis à } \vec{F} = F(r) \vec{u} \end{array} \right.$$

Dans  $(R_G)$ ,  $M$  est donc soumis à la force centrale  $\vec{F}$ . Toutes les propriétés vues dans le chapitre VIII s'appliquent alors.

En particulier, si la force est newtonienne,  $M$  décrit dans  $(R_G)$  une conique dont  $G$  est un foyer, selon la loi des aires.



Par application de la RFD, ou du TEM, on connaît donc  $\overrightarrow{GM} = \vec{r}$ .

Puis :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = 0 \\ \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{array} \right.$$

La connaissance de  $\overrightarrow{GM}$  permet donc ensuite de déterminer  $\overrightarrow{GM_1}$  et  $\overrightarrow{GM_2}$  (trajectoires de  $M_1$  et  $M_2$  dans  $(R_G)$ ).

Mais nous avons vu en VII que les équations du mouvement de  $M$  dans  $(R_G)$  font intervenir 2 grandeurs constantes, déterminées par exemple à l'aide des conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma}^*(M) = \sigma_0^* \quad \text{moment cinétique barycentrique du point } M \\ E^* = E_0^* \quad \text{énergie barycentrique du point } M \end{array} \right.$$

Montrons que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\sigma}^*(M) = \vec{\sigma}^* \{M_1 + M_2\} \\ E_C^*(M) = E_C^* \{M_1 + M_2\} \end{array}}$$