

## MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE FONCTION DE LA DISTANCE

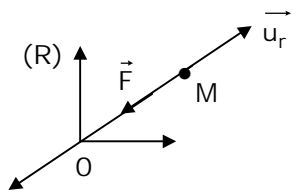
**Plan** (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

I.	Propriétés générales.....	1
II.	Cas d'une force $\vec{F} = -k \vec{OM}$ , $k = \text{cste}$ .....	3
III.	Cas d'une force « newtonienne » $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ : .....	4

\*\*\*\*\*

Dans un référentiel (R) galiléen, on considère un point M soumis à une force :



$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$$

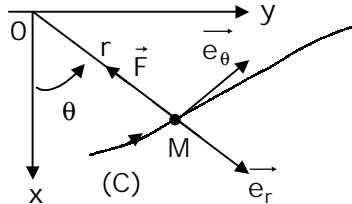
- $F(r) > 0$  : force répulsive
- $F(r) < 0$  : force attractive

### I. Propriétés générales.

Un mouvement à force centrale est aussi un mouvement à accélération centrale. Les propriétés cinématiques ont donc été vues en II.

- La trajectoire est plane.

Dans le plan Oxy, on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ).



$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

- Le mouvement obéit à la loi des aires :

$$\boxed{r^2 \dot{\theta} = C} \quad , \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C}$$

Rem.: la loi des aires correspond à la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \boxed{\vec{\sigma}(O) = mr^2 \dot{\theta} \vec{z} = \text{cste}}$$

- Formules de Binet

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m c^2 \left( u^2 + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \\ F(r) = m a_r = - m c^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \end{cases} \quad \left( u = \frac{1}{r} \right)$$

En dynamique, on peut rajouter la propriété suivante :

- $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p$  dérive d'une énergie potentielle  $E_p(r)$  telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = - F(r) \Rightarrow \boxed{E_p(r) = - \int F(r) dr}$$

Le système est donc conservatif :  $E_m = \text{cste}$

L'étude du mouvement se fait, en général, (sauf en 7.2) en coordonnées polaires.

On peut s'intéresser aux lois  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $r(\theta)$  (équation polaire de la trajectoire).

- Détermination de  $r(t)$  et  $\theta(t)$

On peut utiliser la RFD ou la conservation de l'énergie mécanique :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} F(r) = m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r^2\ddot{\theta} \end{pmatrix} \\ r^2\dot{\theta} = C \end{cases}$$

En éliminant  $\ddot{\theta}$ , on obtient une équation différentielle sur  $r(t)$  (pas toujours simple à résoudre !).

$$E_m = \text{cste } E_0 \Rightarrow \begin{cases} E_0 = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + E_p(r) \\ r^2 \dot{\theta} = C \end{cases}$$

Là encore, l'élimination de  $\dot{\theta}$  conduit à une intégrale 1<sup>ère</sup> de l'énergie de la variable  $r(t)$ .

- Détermination de l'équation polaire de la trajectoire  $r(\theta)$  :

Il est alors judicieux d'utiliser les formules de Binet :

$$\begin{cases} F(r) = - mc^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \\ E_p(r) + \frac{1}{2} mc^2 \left( u^2 + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) = E_0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une équation différentielle sur  $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ .

Rem. :  $E_0$  et  $C$  sont données par les conditions initiales, ou les valeurs de  $r$  et  $\vec{v}$  en un point donné de la trajectoire (par exemple pour une planète du système solaire).

**II. Cas d'une force  $\vec{F} = -k \vec{OM}$ ,  $k = \text{cste}$ .**

Alors :

$$F(r) = \begin{cases} kr \\ E_p(r) = \frac{1}{2} kr^2 + \text{cste} \end{cases}$$

**II.1. Cas ou  $k > 0$  : force attractive.**

En projection sur  $(\vec{x}, \vec{y})$ , la RFD donne :

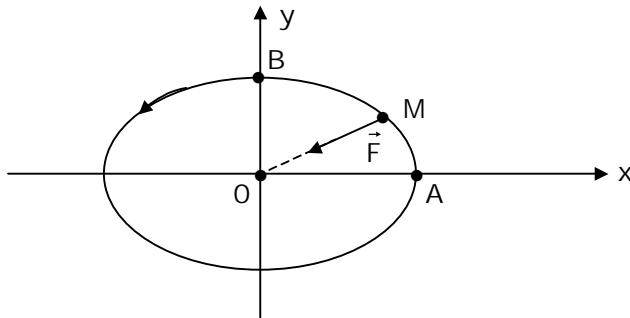
$$\begin{cases} m \ddot{x} = -kx \\ m \ddot{y} = -ky \end{cases}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}, \text{ si } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Il s'agit de l'oscillateur harmonique bidimensionnel :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = B \cos(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$

La trajectoire est une ellipse de centre O, décrite selon la loi des aires.



$$(\varphi - \psi = \Pi/2)$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

Pour  $\varphi - \psi = 0$  (II), cette ellipse se réduit à une droite.

**II.2. Cas ou  $k < 0$  : force répulsive.**

On a cette fois :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} - \omega_0^2 y = 0 \end{cases}, \text{ si } \omega_0^2 = -\frac{k}{m} > 0$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = A \text{ch}(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = B \text{ch}(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$