# MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE FONCTION DE LA DISTANCE

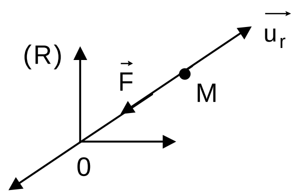
**Plan** *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

**********************



**********************

Dans un référentiel (R) galiléen, on considère un point M soumis à une force :




$$\vec{F} = F(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

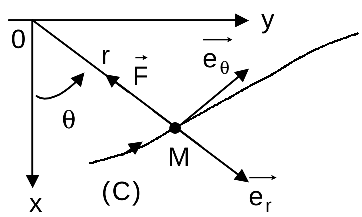
$$\begin{cases} F(r) > 0 : \text{force répulsive} \\ F(r) < 0 : \text{force attractive} \end{cases}$$

## *I. Propriétés générales.*

Un mouvement à force centrale est aussi un mouvement à accélération centrale. Les propriétés cinématiques ont donc été vues en II.

- La trajectoire est <u>plane</u>.

Dans le plan 0xy, on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ).




$$\vec{F} = F(r)\,\overrightarrow{e_r}$$

- Le mouvement obéit à la loi des aires :

$$\boxed{r^2\,\dot{\theta} = C} \quad , \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\,C}$$

*<u>Rem.</u>* : la loi des aires correspond à la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma(O)}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{O} \qquad \boxed{\overrightarrow{\sigma(O)} = mr^2\,\dot{\theta}\,\vec{z} = \overrightarrow{cste}}$$

- <u>Formules de Binet</u>

$$\begin{cases} E_C = \dfrac{1}{2}\,mv^2 = \dfrac{1}{2}\,mc^2\left(u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right) \\ F(r) = ma_r = -\,mc^2u^2\left(u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right) \end{cases} \qquad \left(u = \frac{1}{r}\right)$$

En dynamique, on peut rajouter la propriété suivante :

- $\vec{F} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$ dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = -F(r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_p(r) = -\int F(r)\,dr}$$

Le système est donc <u>conservatif</u> : <u>$E_m$ = cste</u>

L'étude du mouvement se fait, en général, (sauf en 7.2) en coordonnées polaires.

On peut s'intéresser aux lois r(t), θ(t) et r(θ) (équation polaire de la trajectoire).

- <u>Détermination de r(t) et θ(t)</u>

On peut utiliser la RFD ou la conservation de l'énergie mécanique :

- $\vec{F} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F(r) = m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) \\ r^2\,\dot{\theta} = C \end{cases}$

En éliminant $\dot{\theta}$, on obtient une équation différentielle sur r(t) (pas toujours simple à résoudre !).

- $E_m = \text{cste } E_o \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_o = \dfrac{1}{2}\,m\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) + E_p(r) \\ r^2\,\dot{\theta} = C \end{cases}$

Là encore, l'élimination de $\dot{\theta}$ conduit à une intégrale 1ère de l'énergie de la variable r(t).

- <u>Détermination de l'équation polaire de la trajectoire r(θ)</u> :

Il est alors judicieux d'utiliser les formules de Binet :

$$\begin{cases} F(r) = -\,mc^2u^2\left(u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right) \\ E_p(r) + \dfrac{1}{2}\,mc^2\left(u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right) = E_0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une équation différentielle sur $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$.

<u>*Rem.*</u> : $E_O$ et C sont données par les conditions initiales, ou les valeurs de r et $\vec{v}$ en un point donné de la trajectoire (par exemple pour une planète du système solaire).

## *II. Cas d'une force $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$, k = cste.*

Alors :

$$F(r) = kr$$
$$E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \text{cste}$$

### II.1. Cas ou k > 0 : force attractive.

En projection sur $(\vec{x}, \vec{y})$, la RFD donne :

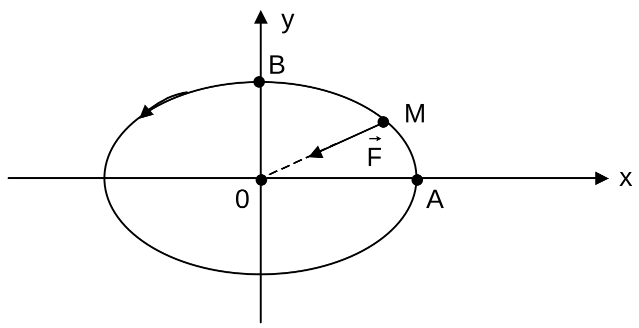
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases} \text{, soit :}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2\, y = 0 \end{cases} \text{, si } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Il s'agit de l'oscillateur harmonique bidimensionnel :

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 + \varphi) \\ y(t) = B\cos(\omega_0 + \psi) \end{cases}$$

La trajectoire est une <u>ellipse de centre 0</u>, décrite selon la loi des aires.




$(\varphi - \psi = \Pi/2)$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

Pour $\varphi - \psi = 0\ (\Pi)$, cette ellipse se réduit à une droite.

### II.2. Cas ou k < 0 : force répulsive.

On a cette fois :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_0^2\, x = 0 \\ \ddot{y} - \omega_0^2\, y = 0 \end{cases} \text{, si } \omega_0^2 = -\frac{k}{m} > 0$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = A\,\text{ch}(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = B\,\text{ch}(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$