

OSCILLATEURS

Plan (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

- I. Oscillateur harmonique..... 1
- II. Oscillateur amorti..... 3
- III. Portrait de phase des oscillateurs harmonique et amorti..... 4
- IV. Oscillations forcées..... 5
- V. Oscillations couplées..... 7
- VI. Analogie électromécanique..... 10

On s'intéresse à un système à un degré de liberté, noté ici x .

I. Oscillateur harmonique.

Il est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ou

$$\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = cste$$

(forme « intégrale 1^{ère} »)

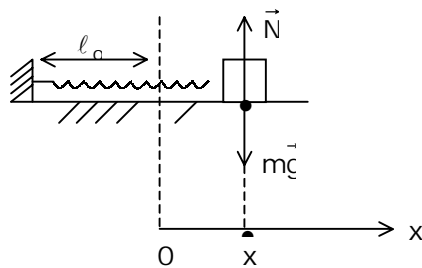
La solution étant sinusoïdale de pulsation ω_0 et période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (A \text{ et } \varphi \text{ déterminés à l'aide des C.I.)$$

I.1. Oscillateurs harmoniques « vrais » :

L'oscillation est harmonique, quelle que soit son amplitude.

Ex. : - pendule élastique (si on reste dans le domaine d'élasticité du ressort).



(Pas de frottements)

$$E_m = cste = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad (E_p \text{ pesanteur} = cste, \text{ donc n'intervient pas}).$$

Soit : $\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = 0,$

si

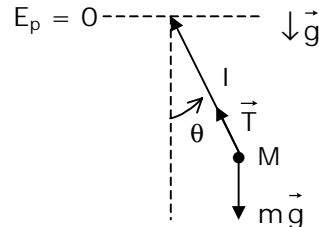
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Pendule cycloïdal (cf exercice)

I.2. Oscillateurs harmoniques « approchés » :

L'oscillation n'est harmonique que pour de faibles amplitudes.

Ex. : pendule simple



Il y a conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m (\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta = \text{cste}$$

Pour theta faible : $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, donc :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2 \theta^2 = \text{cste} \quad , \quad \text{si} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{l}}$$

Rem. : dans le cas général, l'oscillation est périodique non sinusoïdale. L'intégrale 1^{ère} permet de calculer la période :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta &= - mgl \cos \theta_M \\ \Rightarrow \dot{\theta}^2 &= 2 \omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_M) = 4 \omega_0^2 \left(\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Pendant la phase ascendante du pendule :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 2 \omega_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} > 0$$

Par séparation des variables, on tire :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = 2 \omega_0 dt$$

Puis en intégrant sur un quart de période (de 0 à θ_M) :

$$\int_{\theta=0}^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = 2 \omega_0 \frac{T}{4} = \Pi \frac{T}{T_0}$$

Ainsi :

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\Pi} \int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

(Un logiciel mathématique permet alors de calculer numériquement T, pour une valeur donnée de θ_M).

II. Oscillateur amorti.

Reprenons l'exemple du pendule élastique, pour lequel on tient compte désormais d'une force de frottement fluide (« résistance de l'air ») proportionnelle à la vitesse ; on néglige toujours tout frottement solide.

L'équation du mouvement est cette fois :

$$m \ddot{x} = -kx - \underbrace{f \dot{x}}_{\text{frottement fluide}}$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du 2^e ordre à coefficients constants.

En posant :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \frac{\omega_0}{Q_0} = 2 \sigma \omega_0 = \frac{f}{m} \end{cases}$$

l'équation s'écrit sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Cette équation est strictement identique à celle obtenue dans le cours d'électrocinétique pour un système linéaire du 2^e ordre (type RLC).

Rappelons donc simplement les résultats suivants :

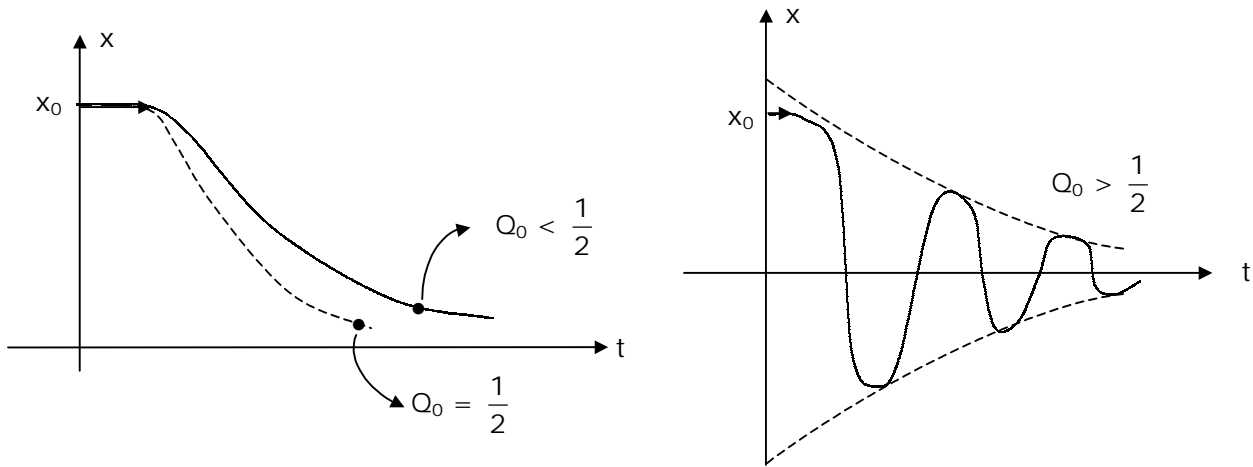
- i) $Q_0 < \frac{1}{2}$: amortissement fort, régime apériodique (non oscillatoire)
- ii) $Q_0 = \frac{1}{2}$: régime critique
- iii) $Q_0 > \frac{1}{2}$: amortissement faible (cas usuel dans l'air), régime pseudopériodique (oscillatoire).

De plus, le système est ici dissipatif : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ diminue au cours du temps.

Si $Q_0 \gg 1$, on a :

$$\begin{cases} Q_0 = 2 \Pi \left(\frac{E_m}{\Delta E_m} \right) \\ E_m(t) \approx E_m(0) e^{-2t/\tau}, \text{ si } \tau = \frac{2 Q_0}{\omega_0} \end{cases} \quad (\Delta E_m = E_m(t) - E_m(t + T), \text{ pertes d'énergie pendant une pseudopériode}).$$

On peut rappeler enfin l'allure des courbes $x(t)$, pour $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$:



III. Portrait de phase des oscillateurs harmonique et amorti.

III.1. Définition :

Pour un point M en mouvement unidimensionnel, on appelle portrait de phase la courbe décrite dans le plan $(x, \overset{\circ}{x})$ par ce point au cours du temps.

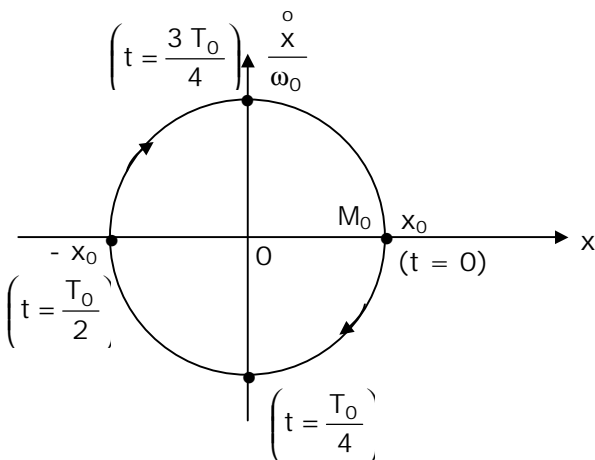
III.2. Cas de l'oscillateur harmonique.

On a : $\overset{\circ}{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = cste$

Le portrait de phase est donc une ellipse.

En général, on préfère se placer dans un plan $(x, \frac{\overset{\circ}{x}}{\omega_0})$; alors $\left(\frac{\overset{\circ}{x}}{\omega_0}\right)^2 + x^2 = cste$

Dans ce plan, le portrait de phase est un cercle.



$$t = 0 : \begin{cases} x = x_0 \\ \overset{\circ}{x} = 0 \end{cases} \text{ (Point } M_0 \text{)}$$

Ce cercle est décrit périodiquement dans le sens rétrograde.