OSCILLATEURS

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

On s'intéresse à un système à un degré de liberté, noté ici x.

I. Oscillateur harmonique.

Il est régi par l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

ou $\boxed{\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = \text{cste}}$ (forme « intégrale 1ère »)

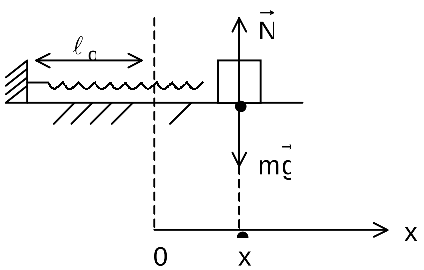
La solution étant sinusoïdale de pulsation ω_0 et période $T_0 = \dfrac{2\Pi}{\omega_0}$:

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$ (A et φ déterminés à l'aide des C.I)

I.1. Oscillateurs harmoniques « vrais » :

L'oscillation est harmonique, quelle que soit son amplitude.

***Ex.* :** - pendule élastique (si on reste dans le domaine d'élasticité du ressort).



(Pas de frottements)

$$E_m = \text{cste} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$ ($E_{p\ \text{pesanteur}}$ = cste, donc n'intervient pas).

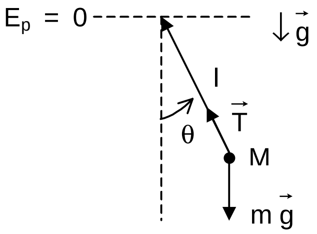
Soit : $\ddot{x} + \omega_0^2 x^2 = 0$, si $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

- Pendule cycloïdal (cf exercice)

I.2. Oscillateurs harmoniques « approchés » :

L'oscillation n'est harmonique que pour de faibles amplitudes.

Ex. : pendule simple



Il y a conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 - mgl \cos\theta = cste$$

Pour θ faible : $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$, donc :

$$\underline{\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = cste} \;, \quad \text{si} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{l}}$$

Rem. : dans le cas général, l'oscillation est périodique non sinusoïdale. L'intégrale 1ère permet de calculer la période :

$$\frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 - mgl \cos\theta = - mgl \cos\theta_M$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = 2\,\omega_0^2 (\cos\theta - \cos\theta_M) = 4\,\omega_0^2 \left(\sin^2\frac{\theta_M}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Pendant la phase ascendante du pendule :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 2\,\omega_0 \sqrt{\sin^2\frac{\theta_M}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} > 0$$

Par séparation des variables, on tire :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_M}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = 2\,\omega_0\, dt$$

Puis en intégrant sur un quart de période (de 0 à θ_M) :

$$\int_{\theta=0}^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_M}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = 2\,\omega_0 \frac{T}{4} = \Pi \frac{T}{T_0}$$

Ainsi :

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\Pi} \int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_M}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}}$$

(Un logiciel mathématique permet alors de calculer numériquement T, pour une valeur donnée de θ_M).

II. Oscillateur amorti.

Reprenons l'exemple du pendule élastique, pour lequel on tient compte désormais d'une force de frottement fluide (« résistance de l'air ») proportionnelle à la vitesse ; on néglige toujours tout frottement solide.
L'équation du mouvement est cette fois :

$$m\ddot{x} = -kx - \underbrace{f\dot{x}}_{\text{frottement fluide}}$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du 2e ordre à coefficients constants.

En posant :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{\omega_0}{Q_0} = 2\,\sigma\,\omega_0 = \dfrac{f}{m} \end{cases}$$

l'équation s'écrit sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_0}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Cette équation est strictement identique à celle obtenue dans le cours d'électrocinétique pour un système linéaire du 2e ordre (type RLC).
Rappelons donc simplement les résultats suivants :

i) $Q_0 < \dfrac{1}{2}$: amortissement fort, régime apériodique (non oscillatoire)

ii) $Q_0 = \dfrac{1}{2}$: régime critique

iii) $Q_0 > \dfrac{1}{2}$: amortissement faible (cas usuel dans l'air), régime pseudopériodique (oscillatoire).

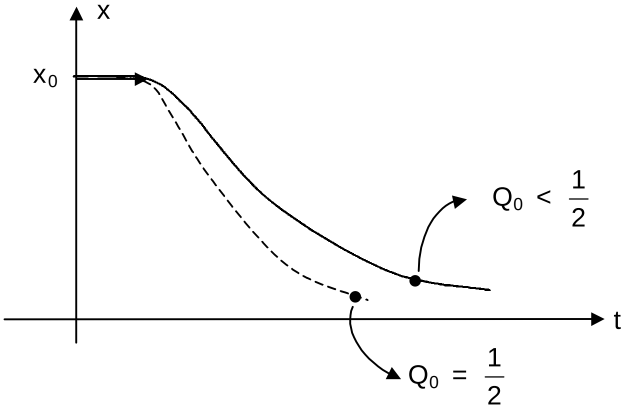
De plus, le système est ici dissipatif : $E_m = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^2$ diminue au cours du temps.

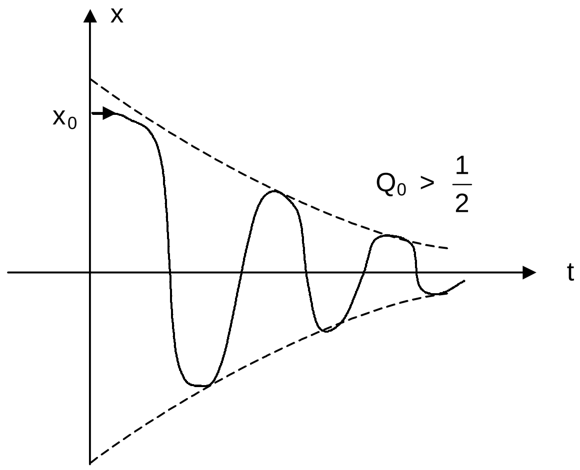
<u>Si $Q_0 >> 1$</u>, on a :

$$\begin{cases} Q_0 = 2\,\Pi \left(\dfrac{E_m}{\Delta E_m}\right) \\ E_m(t) \approx E_m(O)\, e^{-2t/\tau},\ \text{si } \tau = \dfrac{2\,Q_0}{\omega_0} \end{cases}$$

($\Delta E_m = E_m(t) - E_m(t+T)$, pertes d'énergie pendant une pseudopériode).

On peut rappeler enfin l'allure des courbes $x(t)$, pour $x(0) = x_o$ et $\dot{x}(0) = 0$:





III. *Portrait de phase des oscillateurs harmonique et amorti.*

III.1. Définition :

Pour un point M en mouvement unidimensionnel, on appelle portrait de phase la courbe décrite dans le plan $(x, \dot{x})$ par ce point au cours du temps.

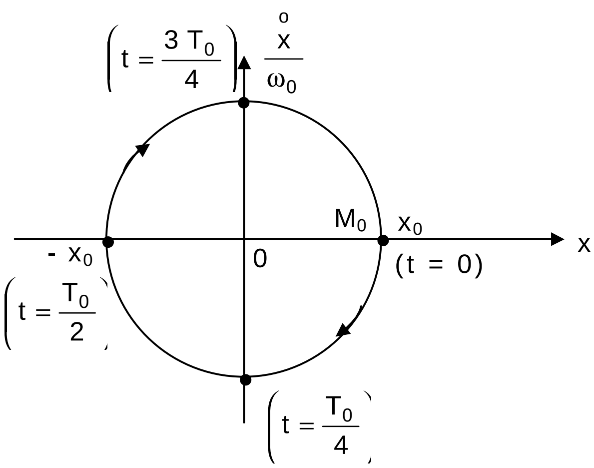
III.2. Cas de l'oscillateur harmonique.

On a : $\dot{x}^2 + \omega_0^2\, x^2 = \text{cste}$

Le portrait de phase est donc une ellipse.

En général, on préfère se placer dans un plan $\left(x, \dfrac{\dot{x}}{\omega_0}\right)$; alors $\left(\dfrac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + x^2 = \text{cste}$

Dans ce plan, le portrait de phase est un cercle.



$$t = 0 : \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

(Point M_0)

Ce cercle est décrit périodiquement dans le sens rétrograde.