CINEMATIQUE DU POINT

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

L'objet de la cinématique est l'étude du mouvement, indépendamment des causes (les forces). On se place évidemment en mécanique newtonienne.

Le mouvement est relatif au référentiel d'étude : on définit un référentiel (R) comme l'association d'un repère d'espace (muni d'une BOND) et d'un repère de temps (horloge). Par abus de langage, on confond souvent référentiel et repère d'espace.

I. Vecteur vitesse.

I.1. Définition.

On définit le vecteur vitesse d'un point M par rapport à un référentiel d'étude :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R}$$

Rem. : s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overset{o}{\vec{r}}$

$$\begin{cases} \|\vec{V}\| \text{ s'exprime en } ms^{-1} \\ \vec{V} \text{ est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement} \end{cases}$$

I.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- Cartésiennes : $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{x} + dy\,\vec{y} + dz\,\vec{z}$

$$\Rightarrow \quad \underset{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}{\vec{V}} \left| \begin{array}{l} \overset{o}{x} = V_x \\ \overset{o}{y} = V_y \\ \overset{o}{z} = V_z \end{array} \right.$$

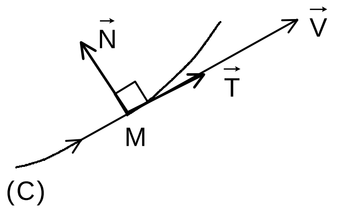
- Cylindriques : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})}{} \left| \begin{array}{l} \dot{r} = V_r \\ r\dot{\theta} = V_\theta \\ \dot{z} = V_z \end{array} \right.$$

- Sphériques : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \underset{(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})}{} \left| \begin{array}{l} \dot{r} = V_r \\ r\dot{\theta} = V_\theta \\ r\sin\theta\,\dot{\varphi} = V_\varphi \end{array} \right.$$

- Trièdre de Frenet :



$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = \dot{s}\,\vec{T} = V\,\vec{T}} \qquad \text{(vitesse algébrique)}$$

II. *Vecteur accélération.*

II.1. Définition.

$$\vec{a}\,(M/R) = \left(\frac{d\,\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$$

(en l'absence d'ambiguïté : $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{a}\| \text{ s'exprime en } ms^{-2} \\ \vec{a} \text{ est dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire (cf ii))} \end{array} \right.$$

II.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- Cartésiennes

$$\vec{V} = \dot{x}(t)\,\vec{x} + \dot{y}(t)\,\vec{y} + \dot{z}(t)\,\vec{z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\ \underset{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}{\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right.}$$

- Cylindriques

$$\vec{V} = \dot{r}(t)\,\vec{e_r}(t) + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{e_\theta}(t) + \dot{z}(t)\,\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = [\ddot{r}\,\vec{e_r} + \dot{r}\,\dot{\vec{e_r}}] + [\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\vec{e_\theta}}] + \ddot{z}\,\vec{e_z}$$

Or : $\left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\\ \dot{\vec{e_\theta}} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r}\end{array}\right.$ donc :

$$\vec{a}\ \underset{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})}{\left|\begin{array}{l}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a_r\\ 2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} = a_\theta\\ \ddot{z} = a_z\end{array}\right.}$$

Rem. **:**

☞ Comme $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ sont des vecteurs « mobiles », il est bien sûr faux d'écrire :

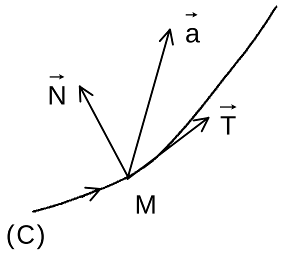
$$a_r = \dot{V}_r \quad \text{et} \quad a_\theta = \dot{V}_\theta\,.$$

Il faut dériver aussi les vecteurs !.. (donc attention)

☞ On peut remarquer que :

$$a_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\dot{\theta}\right)$$ *(nous utiliserons plus tard ce résultat).*

- <u>Trièdre de Frenet</u> :



$$\vec{V} = \dot{s}_{(t)}\,\vec{T}(t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{s}\,\vec{T} + \dot{s}\,\dot{\vec{T}}$$

Or : $$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

Comme $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$:

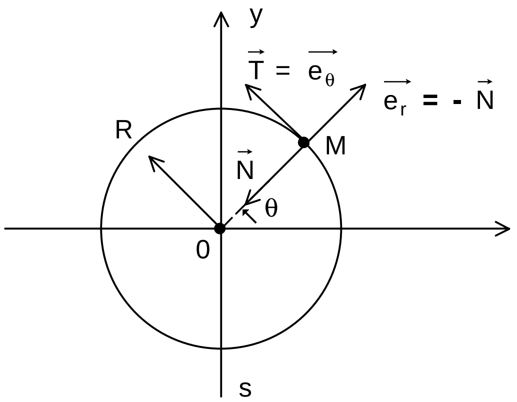
$$\dot{\vec{T}} = \frac{\dot{s}}{R}\vec{N}$$

Donc : $$\vec{a}\;\Big|_{(\vec{T},\vec{N},\vec{B})} \begin{vmatrix} \ddot{s} = \dot{V} = a_T \\ \dot{s}^2/R = \dfrac{V^2}{R} = a_N \\ 0 \end{vmatrix}$$

(a_T accélération tangentielle, $a_N > 0$ accélération normale)

III. Exemples de mouvements.

III.1. Mouvement circulaire.



On pose : $$\begin{cases} s = \overset{\frown}{AM} = R\theta \\ \omega(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$$

On remarque que : $$\begin{cases} \vec{N} = -\vec{e_r} \\ \vec{T} = \vec{e_\theta} \end{cases}$$

(attention, cette propriété n'est valable que pour le cercle).