



# CINEMATIQUE DU POINT

**Plan** (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

I.	Vecteur vitesse.....	1
II.	Vecteur accélération.....	2
III.	Exemples de mouvements.....	4
IV.	Changement de référentiel.....	8

\*\*\*\*\*

L'objet de la cinématique est l'étude du mouvement, indépendamment des causes (les forces).  
On se place évidemment en mécanique newtonienne.

Le mouvement est relatif au référentiel d'étude : on définit un référentiel (R) comme l'association d'un repère d'espace (muni d'une BOND) et d'un repère de temps (horloge).  
Par abus de langage, on confond souvent référentiel et repère d'espace.

## I. Vecteur vitesse.

### I.1. Définition.

On définit le vecteur vitesse d'un point M par rapport à un référentiel d'étude :

$$\vec{V} (M/R) = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$$

Rem. : s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement :  $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

- $\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{V}\| \text{ s'exprime en ms}^{-1} \\ \vec{V} \text{ est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement} \end{array} \right.$

### I.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- Cartésiennes :  $d\vec{OM} = dx\vec{x} + dy\vec{y} + dz\vec{z}$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \vec{V} \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \end{array} \left| \begin{array}{l} \overset{\circ}{x} = V_x \\ \overset{\circ}{y} = V_y \\ \overset{\circ}{z} = V_z \end{array} \right.$$

## CINEMATIQUE DU POINT

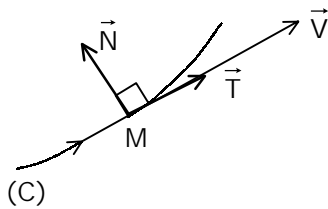
- Cylindriques :  $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{V} \left| \begin{array}{l} \overset{\circ}{r} = V_r \\ r \overset{\circ}{\theta} = V_\theta \\ \overset{\circ}{z} = V_z \end{array} \right. (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

- Sphériques :  $d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

$$\Rightarrow \vec{V} \left| \begin{array}{l} \overset{\circ}{r} = V_r \\ r \overset{\circ}{\theta} = V_\theta \\ r \sin\theta \overset{\circ}{\varphi} = V_\varphi \end{array} \right. (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$$

- Trièdre de Frenet :



$$\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

 $\Rightarrow$ 

$$\vec{V} = \overset{\circ}{s} \vec{T} = V \vec{T}$$

(vitesse algébrique)

## II. Vecteur accélération.

### II.1. Définition.

$$\vec{a}(M/R) = \left( \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right)_R = \left( \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_R$$

(en l'absence d'ambiguïté :  $\vec{a} = \overset{\circ}{V} = \overset{\circ\circ}{r}$ )

$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{a}\| \text{ s'exprime en } \text{ms}^{-2} \\ \vec{a} \text{ est dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire (cf ii)} \end{array} \right.$

## II.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- Cartésiennes

$$\vec{V} = \overset{\circ}{x}(t) \vec{x} + \overset{\circ}{y}(t) \vec{y} + \overset{\circ}{z}(t) \vec{z}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \left| \begin{array}{l} \overset{\circ\circ}{x} \\ \overset{\circ\circ}{y} \\ \overset{\circ\circ}{z} \end{array} \right. (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

- Cylindriques

$$\vec{V} = \overset{\circ}{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \overset{\circ}{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t) + \overset{\circ}{z}(t) \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = [ \overset{\circ\circ}{r} \vec{e}_r + \overset{\circ}{r} \overset{\circ}{e}_r ] + [ \overset{\circ}{r} \overset{\circ\circ}{\theta} \vec{e}_\theta + r \overset{\circ\circ}{\theta} \vec{e}_\theta + r \overset{\circ}{\theta} \overset{\circ}{e}_\theta ] + \overset{\circ\circ}{z} \vec{e}_z$$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{e}_r = \overset{\circ}{\theta} \vec{e}_\theta \\ \overset{\circ}{e}_\theta = - \overset{\circ}{\theta} \vec{e}_r \end{array} \right. \quad \text{donc :}$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} \overset{\circ\circ}{r} - r \overset{\circ\circ}{\theta} = a_r \\ 2 \overset{\circ}{r} \overset{\circ}{\theta} + r \overset{\circ\circ}{\theta} = a_\theta \\ \overset{\circ\circ}{z} = a_z \end{array} \right. (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

**Rem. :**

☞ Comme  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont des vecteurs « mobiles », il est bien sûr faux d'écrire :

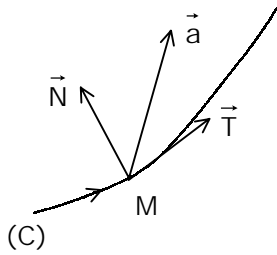
$$a_r = \overset{\circ}{V}_r \quad \text{et} \quad a_\theta = \overset{\circ}{V}_\theta .$$

Il faut dériver aussi les vecteurs !.. (donc attention)

☞ On peut remarquer que :

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \overset{\circ}{\theta}) \quad (\text{nous utiliserons plus tard ce résultat}).$$

- Trièdre de Frenet :



$$\vec{V} = \overset{\circ}{s}(t) \vec{T}(t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \overset{\circ\circ}{s} \vec{T} + \overset{\circ}{s} \overset{\circ}{T}$$

Or :

$$\overset{\circ}{T} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

Comme  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$  :

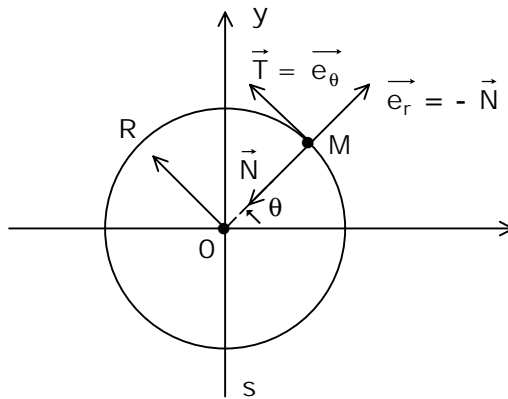
$$\overset{\circ}{T} = \frac{\overset{\circ}{s}}{R} \vec{N}$$

Donc :

$\vec{a}$		$\overset{\circ\circ}{s} = \overset{\circ}{V} = a_T$	(a <sub>T</sub> accélération tangentielle, a <sub>N</sub> > 0 accélération normale)
$(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$		$\overset{\circ^2}{s} / R = \frac{V^2}{R} = a_N$	
		O	

### III. Exemples de mouvements.

#### III.1. Mouvement circulaire.



On pose :

$$\begin{cases} s = \widehat{AM} = R\theta \\ \omega(t) = \overset{\circ}{\theta}(t) \end{cases}$$

On remarque que :

$$\begin{cases} \vec{N} = -\vec{e}_r \\ \vec{T} = \vec{e}_\theta \end{cases} \quad \text{(attention, cette propriété n'est valable que pour le cercle).}$$