

REPERAGE DANS L'ESPACE

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

I.	Notion de point matériel.....	1
II.	Coordonnées cartésiennes.....	2
III.	Coordonnées cylindriques.....	2
IV.	Coordonnées sphériques :	4

I. Notion de point matériel.

1^{ère} Définition : un point matériel est un système matériel de petites dimensions vis-à-vis des moyens d'observation utilisés (une étoile de notre galaxie, observée à l'œil nu, pourra être assimilée à un point matériel).

Mais cette définition est manifestement insatisfaisante ; prenons l'exemple d'un petit morceau de matière en mouvement sur un plan incliné :



- Un petit palet glissera (avec ou sans frottements) sur le plan (①)
 - Une petite bille pourra rouler, glisser et même pivoter sur le plan (②).
- L'étude du mouvement sera donc différente dans les 2 cas : le cas ① relèvera de la « mécanique du point », le cas ② de la « mécanique du solide » (aussi petite soit la bille).

2^e définition : un point matériel « libre » (de se mouvoir dans l'espace, sans aucune « liaison ») est un système matériel possédant 3 degrés de liberté (paramètres indépendants permettant de décrire complètement le système) : ses coordonnées.

Par opposition, un solide « libre » possèdera 6 degrés de liberté (3 degrés de translation et 3 degrés de rotation).

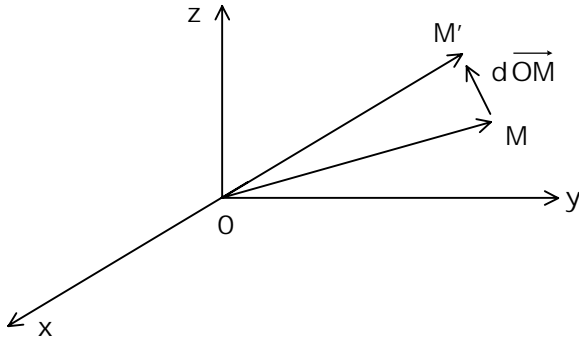
Rem. : en cas d'existence de « liaisons » : $n \leq 3$ pour un point matériel, $n \leq 6$ pour un solide (n nombre de degrés de liberté).

Exemple :

- *Dans le cas ①, le palet, posé sans vitesse sur le plan, possède 1 degré de liberté x .
 - *Dans le cas ②, la bille (toujours posée sans vitesse), possède a priori 3 degrés de liberté : x , θ (pivotement), φ (roulement)
- Pour repérer un point matériel libre, on définit ses coordonnées dans une base orthonormée directe (BOND).
On utilise usuellement en physique 3 systèmes de coordonnées.

II. Coordonnées cartésiennes.

On utilise la BOND « fixe » $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} \begin{cases} x \\ y = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} \\ z \end{cases}$$

($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$)
(vecteur position)

A priori, le point M sera mobile dans l'espace. En munissant le repère d'une horloge (repère de temps), on aura alors :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$$

Si M' est la position du mobile à l'instant $t + dt$, ses coordonnées sont : $x + dx, y + dy, z + dz$. Ainsi :

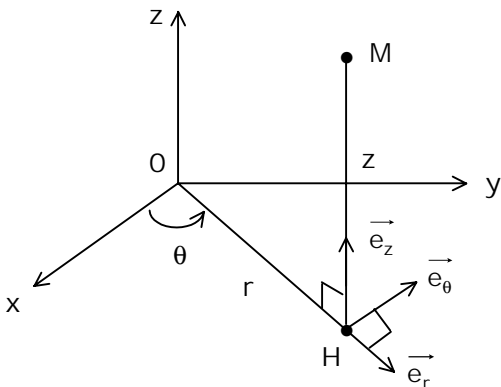
$$\overrightarrow{OM}'(t) = (x + dx)\vec{x} + (y + dy)\vec{y} + (z + dz)\vec{z}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM}' = d\overrightarrow{OM}$ est appelé vecteur « déplacement élémentaire » (pendant l'intervalle de temps « élémentaire » dt) associé au mobile M. En coordonnées cartésiennes, nous avons donc :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{x} + dy\vec{y} + dz\vec{z}$$

III. Coordonnées cylindriques.

On les utilise quand on a un problème à « symétrie cylindrique » d'axe Oz ; elles simplifient également l'étude de certains problèmes de mécanique (cf mouvements à force centrale).



Soit H la projection orthogonale de M sur le plan Oxy.

Les 3 coordonnées cylindriques du point M sont :

$$\begin{cases} r = OH \in [0, +\infty[\\ \theta = (\vec{Ox}, \vec{OM}) \in [0, 2\pi] \\ z = \overline{HM} \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

On utilise alors la base « locale » (ou « mobile ») de coordonnées $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ telle que :

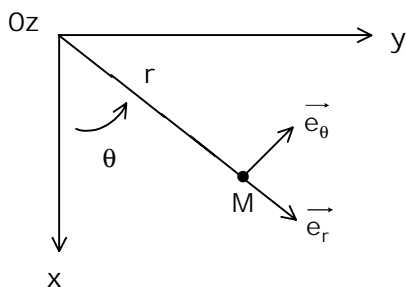
$$\begin{cases} \vec{e}_r = \frac{\vec{OH}}{r} & \text{vecteur « radial »} \\ \vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} & \text{vecteur « orthoradial »} \\ \vec{e}_z = \vec{z} \end{cases}$$

Dans ces conditions : $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

On remarquera que, si M se déplace au cours du temps, \vec{e}_r et \vec{e}_θ « varient ».

Donc : $\vec{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z$ ($\vec{e}_z = \vec{z}$ est « fixe »)

Rem. : pour un point M restant dans le plan Oxy, on le repère par ses coordonnées (r, θ) , appelées coordonnées « polaires » :



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Propriété fondamentale

On a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y} \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y} \end{cases}$$