- PROBLEME D' ELECTROMAGNETISME 1 -

· ENONCE : « Propulsion par voile solaire »

DONNEES :

- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^{8} m.s^{-1}$
- cste universelle de la gravitation : $G = 6{,}67.10^{11} u.s.i$
- masse du Soleil : $M_S = 1{,}99.10^{30} kg$
- 1 an = $3{,}16.10^{7} s$
- 1 U.A = $1{,}5.10^{11} m$ = 1 unité astronomique = rayon de la trajectoire circulaire que décrirait, avec une période de un an, une planète de masse très inférieure à celle du Soleil, sous l'effet de la seule force de gravitation.
- Rayons des orbites de quelques planètes du système solaire :
  Mercure : 0,39 U.A ; Vénus : 0,72 U.A ; Terre : 1,00 U.A ; Mars : 1,52 U.A
  Jupiter : 5,20 U.A

I. Pression de radiation

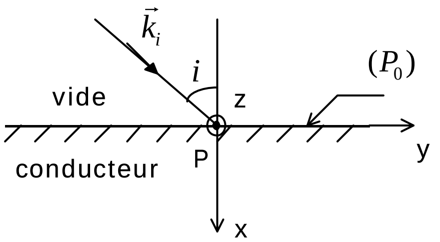
1.1) Ecrire les équations de Maxwell qui régissent les champs électrique $\vec{E}(M,t)$ et magnétique $\vec{B}(M,t)$ dans le vide, en présence de charges et de courants, en précisant brièvement leur signification physique.

1.2) On envisage un milieu conducteur homogène et isotrope parfait, c'est-à-dire de conductivité infinie ; des champs électrique et magnétique, non stationnaires, peuvent-ils exister dans un tel milieu ? On justifiera les réponses données à partir des équations fondamentales.

1.3) Rappeler les équations de passage des champs électrique et magnétique à une interface entre un milieu conducteur parfait et le vide.

1.4) Quelle est la définition d'une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique (O.E.P.P.M) ? Préciser, sans démonstration, la structure et les caractéristiques essentielles d'une telle onde se propageant dans le vide (pulsation w et vecteur d'onde $\vec{k}$).

1.5) On envisage la réflexion, sous incidence oblique, d'angle d'incidence i, d'une O.E.P.P.M, de pulsation w et vecteur d'onde $\vec{k}_i$, polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence, sur une interface plane ((P_0)) vide/conducteur parfait :



On notera E_0 l'amplitude du champ électrique $\vec{E}_i(M,t)$ de cette onde.

Par ailleurs, (P_0) est le plan Pyz.

1.5.1) Ecrire, en représentation complexe, les champs électrique et magnétique de l'onde incidente, sur la base (x,y,z) ; on adoptera la convention : $\cos wt = \Re\{\exp(-jwt)\}$.

1.5.2) Justifier l'existence et les caractéristiques de l'onde réfléchie (supposée être une O.E.P.P.M) ; on déterminera successivement sa pulsation, son vecteur d'onde $\vec{k}_r$ et on écrira, en représentation complexe, les champs $\vec{E}_r(M,t)$ et $\vec{B}_r(M,t)$.

1.5.3) Exprimer les charges surfaciques $s(P,t)$ et les courants surfaciques $\vec{j}_S(P,t)$, se développant en tout point P de la surface du conducteur éclairée par l'onde incidente.

1.5.4) En déduire la force résultante s'exerçant par unité de surface du conducteur, soit $\dfrac{d\vec{F}}{dS}(P,t)$.

1.5.5) Calculer les valeurs moyennes temporelles de l'énergie électromagnétique volumique de l'onde incidente $\langle w_i(M,t)\rangle_t$ et de son vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi}_i(M,t)\rangle_t$, en fonction de E_0.

1.5.6) Déterminer, enfin, la « pression de radiation » $\vec{p}_M$, définie comme la valeur moyenne temporelle de la force $\dfrac{d\vec{F}}{dS}(P,t)$, en fonction de E_0 et de l'angle d'incidence i.

1.6) Reprendre l'ensemble des questions 1.5) pour une O.E.P.P.M de même pulsation w, polarisée rectilignement dans le plan d'incidence, pour un même angle d'incidence, sur une interface de même nature. On démontrera que la pression de radiation s'exerçant sur le conducteur a, pour les deux polarisations étudiées, la même expression.

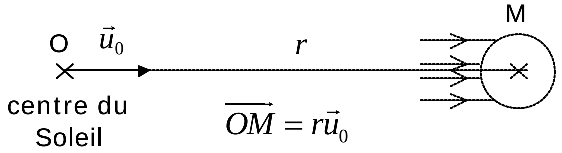
1.7) La Terre, située en moyenne à la distance de 1 U.A du Soleil, reçoit une puissance de rayonnement solaire par unité de surface de $0{,}15\ W.cm^{-2}$; on suppose que l'émission solaire se fait de manière isotrope, sous forme d'ondes sphériques et on néglige l'absorption du rayonnement solaire.

1.7.1) Indiquer comment varie la puissance reçue par unité de surface avec la distance r de la source au récepteur et calculer littéralement puis numériquement la puissance totale P_S émise par le Soleil sous forme de rayonnement électromagnétique.

1.7.2) Justifier l'approximation locale de l'onde sphérique en onde plane, tant sur son terme d'amplitude que sur son terme de phase, pour une dimension maximum d du récepteur très inférieure à r, distance source/récepteur.

1.7.3) Exprimer la pression de radiation solaire à laquelle est soumis un récepteur de petites dimensions, parfaitement réfléchissant et recevant le rayonnement sous l'angle d'incidence i ; on exprimera la pression en fonction de P_S, r et i.

1.8) **Application 1** : *justification du sens de courbure de la queue de certaines comètes*



On considère une particule matérielle sphérique, parfaitement réfléchissante, de centre M et de rayon a, de masse volumique m, se trouvant à la distance r du Soleil $(r \gg a)$

1.8.1) Calculer la valeur moyenne $\vec{F}_R$ de la force due au rayonnement solaire que subit la particule ; on exprimera le résultat en fonction de $E_0(r)$ et a, puis en fonction de P_S, a et r.

1.8.2) Calculer la force de gravitation $\vec{F}_G$ qu'exerce le Soleil sur la particule.

1.8.3) A partir de quelle valeur a_0 du rayon de la particule a-t-on $\left\|\vec{F}_R\right\| \geq \left\|\vec{F}_G\right\|$?

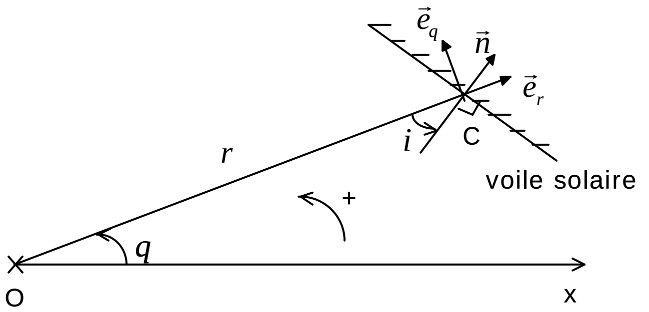
Application numérique : calculer a_0 pour $m = 1g.cm^{-3}$.

1.8.4) L'observation astronomique de la queue de certaines comètes a mis en évidence leur répulsion par le Soleil : justifier, à partir du résultat précédent, le qualificatif qui leur a été donné de « poussiéreuses ».

II. Navigation à voile solaire

• On considère un véhicule spatial de centre de masse C et de masse totale m, qui évolue dans l'espace sous l'action de la force de gravitation solaire $\vec{F}_G$ et de la force due au rayonnement solaire $\vec{F}_R$, s'exerçant sur une voile solaire plane de surface S, solidaire de l'engin et recevant le rayonnement sous un angle d'incidence i supposé constant.

• Le point O désigne le centre du Soleil, origine du référentiel galiléen dans lequel on étudie le mouvement du véhicule ; on pose en outre $\overrightarrow{OC} = r\vec{e}_r$, et P_S désigne toujours la puissance totale du rayonnement solaire.



On admettra que le mouvement du point C s'effectue dans un plan (P) passant par O, fixe par rapport au référentiel galiléen, et que le vecteur $\vec{n}$ normal à la voile ne cesse d'appartenir à ce plan.
Ox désigne un axe polaire choisi de façon arbitraire dans le plan (P), et permet d'effectuer un repérage polaire du point C.

2.1) Donner les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du point C en coordonnées polaires.

2.2) Montrer que l'accélération du point C s'écrit : $\vec{a} = \dfrac{A}{r^2}\vec{e}_r + \dfrac{B}{r^2}\vec{e}_q$

Expliciter les coefficients A et B en fonction de G, M_S, P_S, S, c, m et i, et écrire les équations différentielles en r et en q du mouvement du point C.

• Dans toute la suite du problème, on étudie le cas particulier où l'angle $(\vec{e}_r, \vec{v}) = j$ reste constant au cours du mouvement du véhicule ; on pose $l = \tan j$.

• On se propose de vérifier que ce cas particulier est solution des équations écrites en 2.2), pour des conditions initiales particulières, et de rechercher les équations polaires des trajectoires correspondantes.

2.3) Etablir l'équation différentielle en r du mouvement ; montrer qu'elle s'écrit :

$r''=\dfrac{d^2r(t)}{dt^2}=br^{-2}$, où b est un coefficient constant qu l'on déterminera en fonction de A,B,l .

On supposera que b est négatif, hypothèse que l'on vérifiera numériquement par la suite.

Intégrer cette équation différentielle en faisant le choix des conditions initiales suivantes :

$$r'(0)=\frac{dr}{dt}(0)=\sqrt{\frac{-2b}{r(0)}} \qquad \text{et} \qquad r(0)=r_0$$

En déduire la solution $r(t)$ sous la forme : $r(t)=r_0(1+at)^b$

Trouver la valeur numérique de b et l'expression littérale de a en fonction de b et r_0 ; commenter le signe de a .

2.4) En déduire la solution $q(t)$ correspondante ; on choisira $q(0)=0$, ce qui revient à positionner l'axe polaire Ox dans le plan (P) selon le vecteur $\overrightarrow{OC_0}$, où C_0 est la position initiale du point C.

2.5) Etablir l'équation polaire $r(q)$ de la trajectoire du point C et identifier la courbe (Γ) correspondante.

2.6) Exprimer les coefficients A et B en fonction de r_0, a et l, puis les composantes radiale et orthoradiale de $\vec{v}$ en fonction de B, l et r ; discuter les signes possibles des coefficients A, B et a en fonction du signe de l .

2.7) Déterminer la valeur absolue i_0 de l'angle d'incidence i, encore appelé « angle de présentation » de la voile, pour laquelle la composante orthoradiale de l'accélération est maximum en valeur absolue ; calculer numériquement i_0 : on adoptera cette valeur dans toute la suite du problème, pour les applications numériques.

- On souhaite, pour mener la fin de cette étude, adopter les unités adaptées aux problèmes de mécanique spatiale :
  - longueurs en unités astronomiques (U.A)
  - temps en années

2.8) On appelle $a_0(r)$ la valeur absolue du terme d'accélération gravitationnelle du Soleil à la distance r, et on introduit les deux coefficients sans dimension R et T tels que :

$$a_r(r)=-a_0(r)\times(1-R) \qquad \text{et} \qquad a_q(r)=a_0(r)\times T$$

Exprimer $a_0(r)$ dans le système d'unités (U.A, années), puis A et B, dans ce même système, en fonction de R et T ; indiquer les limites de variation de R.

- La voile solaire est un film de terphane aluminisé de masse surfacique uniforme $m_e=5{,}6g.m^{-2}$ et de surface $S=2{,}68.10^5m^2$; la masse de la voile constitue 40% de la masse totale m du véhicule spatial.

2.9) Calculer numériquement la force de pression de radiation F_R sur la voile, ainsi que la force de gravitation solaire F_G sur le véhicule, à la distance de 1 U.A du Soleil.

2.10) Calculer numériquement les coefficients R et T, pour la valeur i_0 de l'angle de présentation.

A l'aide des expressions de A et B obtenues en 2.6), et en faisant, à priori, l'hypothèse $l^2 \gg 1$, écrire une relation approchée simple entre A, B et l, puis entre R,T et l ; en déduire une relation entre R,T,a et r_0.

Calculer numériquement l et l'angle j, puis le coefficient a en $(années)^{-1}$, pour $r_0 = 1\,U.A$.

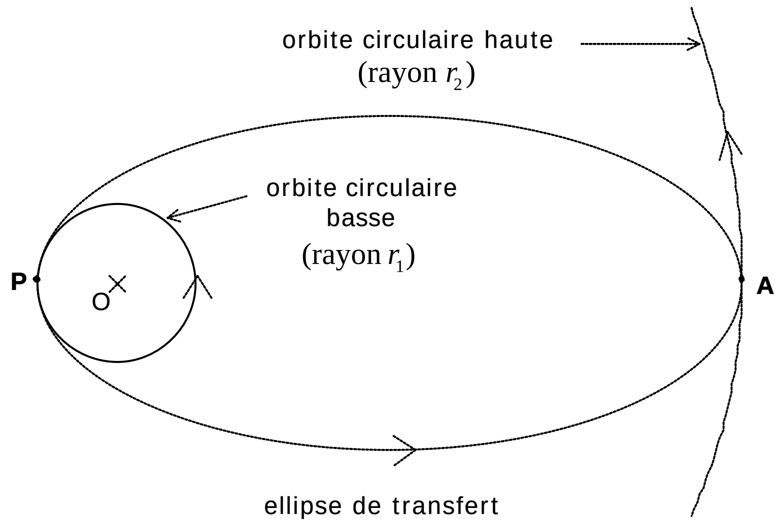
Vérifier, à posteriori, l'hypothèse faite sur l, ainsi que le signe de la constante b.

2.11) L'ensemble des résultats précédents permet d'exprimer les composantes $v_r(r)$ et $v_q(r)$ de la vitesse du véhicule en fonction des coefficients R et l et de la vitesse $v_0(r)$ qu'aurait le véhicule sur une orbite circulaire de rayon r autour du Soleil, décrite d'un mouvement uniforme sous la seule force de gravitation. Etablir les relations correspondantes.

• On suppose que le point de départ du véhicule spatial est à la distance r_1 du centre O du Soleil et que sa destination est à la distance r_2.

2.12) Etablir l'expression de « l'excédent » de vitesse au départ $\vec{w}_1 = \vec{v}(r_1) - \vec{v}_0(r_1)$ en fonction de $v_0(r_1), R$ et l ; écrire de même $\vec{w}_2 = \vec{v}(r_2) - \vec{v}_0(r_2)$ à l'arrivée en fonction de $v_0(r_2), R$ et l. On calculera numériquement les rapports $\dfrac{\|\vec{w}_1\|}{v_0(r_1)}$ et $\dfrac{\|\vec{w}_2\|}{v_0(r_2)}$.

• On se propose de comparer les valeurs précédentes à celles nécessaires à un transfert de Hohman « classique » correspondant à la figure ci-dessous :



Le véhicule est en orbite basse autour du Soleil de rayon r_1 ; il est transféré sur une orbite circulaire haute de rayon r_2 en décrivant une demi-ellipse dite "ellipse de transfert". Ce transfert requiert une première variation de vitesse au périhélie P de l'ellipse et une deuxième variation à l'aphélie A.

2.13) On pose :

$\vec{w}_1' = \vec{v}'(r_1) - \vec{v}_0(r_1)$, avec $\vec{v}'(r_1)$ = vitesse du véhicule sur l'orbite elliptique au point P

$\vec{w}_2' = \vec{v}_0(r_2) - \vec{v}'(r_2)$, avec $\vec{v}'(r_2)$ = vitesse du véhicule sur l'orbite elliptique au point A

Exprimer $\vec{w}_1'$ et $\vec{w}_2'$ en fonction de $\vec{v}_0(r_1), \vec{v}_0(r_2), r_1$ et r_2.

Calculer numériquement $\dfrac{\|\vec{w}_1\,'\|}{v_0(r_1)}$ et $\dfrac{\|\vec{w}_2\,'\|}{v_0(r_2)}$ pour un transfert Terre-Jupiter.

• On souhaite enfin comparer, du point de vue des durées de transfert, les trajectoires planes (Γ) déterminées à la question 2.5) d'un véhicule partant de la Terre (soit pour $r_0 = 1\, U.A$), résultant d'une propulsion avec voile solaire, au transfert de Hohman classique.

2.14) Etablir, dans le système (U.A, années), l'expression littérale de la durée de transfert $T_{1\to 2}$ sur la courbe (Γ) de la valeur r_1 à la valeur r_2.

Etablir l'expression de la durée de transfert de Hohman $T'_{1\to 2}$, en années, en fonction de r_1 et r_2 exprimés en U.A.

Effectuer les applications numériques correspondantes pour le transfert Terre-Jupiter.

2.15) Dresser un tableau comparé des durées des deux types de transfert pour les planètes intérieures du système solaire (Vénus et Mercure), et pour la planète extérieure la plus proche de la Terre (Mars) ; commenter ces résultats.

****

D'après le concours I.E.N.A.C 96 , épreuve optionnelle P'