Séries associées à la fonction ζ. Formule des compléments.

d'après le Concours des Mines 1996

Soit ζ la fonction définie sur la demi-droite réelle ouverte $]1\,,\,+\infty[$ par la relation :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

Il est admis que cette fonction est continue sur $]1\,,\,+\infty[$.
L'objet de ce problème est de caractériser, sur l'intervalle $I =]-1\,,\,1]$, la somme $F(x)$ de la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k$, $k \geqslant 2$; elle est définie par la relation :

$$F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k.$$

Dans la première partie un calcul explicite donne la valeur de $F(1)$ en fonction de la constante d'Euler γ. L'objet de la deuxième partie est d'exprimer la somme $F(x)$ lorsque le réel x appartient à l'intervalle I en fonction de la constante d'Euler et d'une fonction G dont une propriété fonctionnelle est établie à la troisième partie.
Dans tout le texte nous usons des notations suivantes :

- pour tout entier naturel k, φ_k désigne la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0\,,\,+\infty[$ par la relation : $\varphi_k(x) = \dfrac{[x]}{x^{k+1}}\cdot$ L'expression $[x]$ désigne la partie entière du réel positif x ; c'est l'entier naturel vérifiant la double inégalité : $[x] \leqslant x < [x]+1$.
- pour tout entier $k \geqslant 2$, S_k et T_k désignent les intégrales ci-dessous :

$$S_k = \int_1^{+\infty} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad T_k = \int_2^{+\infty} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Partie I

1) Existence et calcul de S_k [I] [S]

a) Justifier l'intégrabilité de φ_k pour tout entier $k \geqslant 2$.

b) Exprimer le réel S_k à l'aide de $\zeta(k)$ en considérant, par exemple, la série de terme général $f_n(k) = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \ \big((n\,,\,k) \in \mathbb{N}^{*2},\ k \geqslant 2\big)$.

2) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, et $(-1)^k T_k$ [I] [S]

a) Démontrer que la série de terme général $(-1)^k T_k$ est absolument convergente.

b) Démontrer que la série de terme général $(-1)^k S_k$, est convergente.
Soient S et T les sommes de ces séries :

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k S_k \ ; \ T = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k T_k \, .$$

c) Déterminer la relation qui lie S et T ; la relation $\ln 2 = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$ est admise.

3) Expression de T à l'aide d'une intégrale [I] [S]

Soit φ la fonction définie sur la demi-droite fermée $[2\,,\,+\infty[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \frac{[x]}{x^2(1+x)} \, .$$

Justifier que φ est intégrable sur la demi-droite $[2\,,\,+\infty[$ et exprimer le réel T en fonction de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi$.

4) Calcul de S [I] [S]

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des réels définis par la relation : $h_n = \dfrac{1}{n} - \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$.

a) Établir la convergence de la série de terme général h_n . Soit H la somme de la série : $H = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

b) Déduire des résultats des questions 2.c) et 3) l'égalité entre les deux réels H et S.

Soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par la relation : $c_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n$.

c) En exprimant, par exemple, h_n à l'aide de l'expression $c_{n+1} - c_n$, montrer que la suite c est convergente et calculer H à l'aide de la constante d'Euler $\gamma = \lim c$.
En déduire la valeur de $F(1)$ où F est la fonction définie dans le préambule.

Partie II

1) Fonctions U_n , $n \in \mathbb{N}^*$ [I] [S]

a) Considérons pour un entier naturel n donné, $n \geqslant 1$, et un réel x donné, la série de terme général $u_k(n,x) = \dfrac{1}{k}\Big(-\dfrac{x}{n}\Big)^k$ $(k \geqslant 2)$.
Déterminer l'ensemble J_n des réels x pour lesquels la série de terme général $u_k(n,x)$ $k \geqslant 2$, est convergente.

Soit U_n la fonction définie sur J_n par la relation : $U_n(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(n,x)$.

b) Exprimer $U_n(x)$ au moyen de fonctions élémentaires.

c) Pour un réel x donné, vérifier qu'il existe un entier N tel que $x \in \bigcap_{n=N}^{+\infty} J_n$.

Déterminer deux réels A et α tels que $U_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}$.

2) Étude de la fonction F [I] [S]

a) Démontrer l'encadrement : pour tout réel $x > 1$, $1 < \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

b) Déterminer l'ensemble I des réels x pour lesquels la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k$, $(k \geqslant 2)$ est convergente.
I est ainsi l'ensemble de définition de la fonction F définie dans le préambule.

3) Convergence de la série $\sum U_n(x)$ vers $F(x)$ [I] [S]

a) Soit x un réel appartenant à l'intervalle I. Démontrer que la série de terme général $U_n(x)$, $(n \geqslant 1)$, définie à la question II-1.a), converge et a pour somme $F(x)$.

b) Démontrer que l'application F est continue sur I.
Pour tout entier n strictement positif on nomme G_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-1\,, +\infty[$, par la relation :

$$G_n(x) = \frac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

4) Limite de la suite de terme général $G_n(x)$ $(n \geqslant 1)$ [I] [S]

En utilisant les résultats des questions I-4) et II-3.b), démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, la suite de terme général $\ln\big(Gn(x)\big)$, $n \geqslant 1$, est convergente.
En déduire que pour tout $x \in I$, la suite $\big(G_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers $G(x)$ où G est une application continue sur I que l'on précisera.

Partie III

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $]0\,, 1[$ dans $\mathbb{R}$, et T l'application de E dans E définie par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in]0\,, 1[,\ T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1) Deux fonctions propres pour T [I] [S]

Vérifier que T est un endomorphisme de E admettant pour vecteurs propres remarquables pour la valeur propre 2 les fonctions u et v de E définies par

$$\forall x \in]0\,, 1[\,,\ u(x) = \operatorname{cotan} \pi x \quad \text{et} \quad v(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

2) Fonctions f continues sur $[0\,,\,1]$ vérifiant $T(f) = 2f$ [I] [S]

f désigne dans cette question une fonction de E, prolongeable en une fonction continue $\overline{f}$ sur $[0\,,\,1]$, telle que $T(f) = 2f$.

a) Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0\,,\,1]$ tel que $f(x_0) = M$ soit le maximum de $\overline{f}$ et qu'alors $\overline{f}\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = M$.

b) En déduire que la fonction $\overline{f}$ atteint son maximum et son minimum au point 0. Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

3) Développement Eulérien de cotan πx [I] [S]

a) Comment choisir le réel a pour que la fonction $f = v - au$ soit prolongeable en une application $\widetilde{f}$ 1-périodique sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$?

b) Déduire de III-1), 2.b) et 3.a) l'identité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ , \quad \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotan} \pi x\,.$$

4) Formule des compléments [I] [S]

a) Par une intégration convenable montrer la relation

$$\forall x \in]0\,,\,1[\ , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right).$$

b) En déduire la relation

$$\forall x \in]0\,,\,1[\ , \quad G(x)G(1-x) = \frac{\pi x(1-x)}{\sin \pi x}\,.$$

c) En déduire que $\quad F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k 2^k}\,\zeta(k) = \frac{\gamma}{2} + \frac{\ln \pi}{2} - \ln 2\,.$

♦ ♦
♦

Indications ou résultats

Partie I

1) Existence et calcul de S_k [Q]

a) Dominer $|\varphi_k|$ par une fonction de Riemann intégrable sur $[1\,,\,+\infty[$.

b) $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(k) = \frac{\zeta(k)}{k}$.

2) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, et $(-1)^k T_k$ [Q]

a) $|T_k| = \displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi_k(x)dx \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

b) $S_k = T_k + \displaystyle\int_1^2 \varphi_k(x)dx = T_k + \frac{1}{k} - \frac{1}{k2^k}$. La série $\sum(-1)^k S_k$ est combinaison linéaire de 3 séries convergentes.

c) Utiliser la formule connue $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ sur l'intervalle $]-1\,,\,1]$ pour les valeurs $x = 1$ et $x = \dfrac{1}{2}$. $\quad S = T + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{1}{2}$.

3) Expression de T à l'aide d'une intégrale [Q]

$$T = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k T_k = \int_2^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4) Calcul de S [Q]

a) $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

b) Décomposer $\dfrac{1}{x^2(1+x)}$ pour obtenir $T = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(h_n - h_{n+1}) = H - (h_1 - h_2)$. Déduire de 2.c) que $S = H$.

c) $\gamma = H = S = F(1)$.

Partie II

1) Fonctions U_n, $n \in \mathbb{N}^*$ [Q]

a) Règle de d'Alembert et théorème des séries alternées. $\quad J_n =]-n\,,\,n]$.

b) Pour $x \in J_n$, $U_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

c) $U_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$.

2) Étude de la fonction F [Q]