

Racines carrées dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ lorsque la dimension de E est finie

ENSI M 1988, (Math 2)

Notations :

Dans tout le problème n et N sont deux entiers naturels non nuls.

- E est l'espace vectoriel \mathbb{C}^N .
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E . On note O l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité de E .
- $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} .
 $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré au plus n .
- Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on désigne par
 - ◊ $\text{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f ,
 - ◊ $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble des "racines carrées de f " dans $\mathcal{L}(E)$: $\mathcal{R}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$,
 - ◊ $\tilde{P}(f)$ l'endomorphisme de E défini par $\tilde{P}(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = e$).
- F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , on appelle projecteur sur F parallèlement à G , l'endomorphisme $p_{F,G}$ de E tel que : $\forall (x, y) \in F \times G, p_{F,G}(x + y) = x$.
- \mathbb{N}_n est le sous-ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ de \mathbb{N}^* .

Partie I

Soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q tels que

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} p + q = e \\ ap + bq = f \end{cases}$$

[I] [S] I. 1) Calculer $(f - ae)(f - be)$. En déduire que f est diagonalisable.

[I] [S] I. 2) a) Établir que $pq = qp = O$, $p^2 = p$, $q^2 = q$.

b) Montrer que $\text{Sp}(f) = \{a, b\}$.

c) On suppose que $ab \neq 0$. Montrer que f est bijective et que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f^m = a^m p + b^m q.$$

[I] [S] I. 3) Montrer que p est le projecteur sur $\text{Ker}(f - ae)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - be)$ et que q est le projecteur sur $\text{Ker}(f - be)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - ae)$.

[I] [S] I. 4) On note F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q .

- Montrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.
- Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F .
- Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

[I] [S] I. 5) Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$. En déduire A^m en fonction de I_3 et J .
- Montrer qu'il existe deux couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tels que $\forall m \in \mathbb{N}, A^m = a^m B + b^m C$.
- Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

Partie II

Soit (p_1, p_2, \dots, p_n) une famille de n endomorphismes non nuls de E , (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille de n nombres complexes distincts, et f un endomorphisme de E tel que, pour tout entier naturel m , $f^m = \sum_{k=1}^n x_k^m p_k$.

[I] [S] II. 1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \tilde{P}(f) = \sum_{k=1}^n \tilde{P}(x_k) p_k$.

[I] [S] II. 2) On pose $\Pi = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, $\Pi_l = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n (X - x_k)$ et $L_l = \frac{\Pi_l}{\tilde{\Pi}_l(x_l)}$.

- Calculer $\tilde{\Pi}(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?
- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}_n, p_k = \tilde{L}_k(f)$. Vérifier que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2, p_k p_l = \delta_{kl} p_k$ où δ_{kl} est le symbole de Kronecker.
- Montrer que $\text{Sp}(f) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$.

[I] [S] II. 3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n, p_k$ est le projecteur sur $\text{Ker}(f - x_k e)$ parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \text{Ker}(f - x_l e)$.

[I] [S] II. 4) On désigne par F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille (p_1, p_2, \dots, p_n) .

- Quelle est la dimension de F ?
- Déterminer le cardinal de $\mathcal{R}(f) \cap F$.
- Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ? (On précisera le nombre de ces projecteurs ainsi que leurs éléments caractéristiques)

[I] [S] II. 5) On suppose ici que $n = N$.

- a) Montrer que $\forall g \in \mathcal{L}(E), gf = fg \iff g \in F$.
 b) Quel est le cardinal de $\mathcal{R}(f)$?

[I] [S] II. 6) Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que $\text{Sp}(h) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$. Montrer qu'il existe une famille (q_1, q_2, \dots, q_n) de n endomorphismes non nuls de E , tels que $\forall m \in \mathbb{N}, f^m = \sum_{k=1}^n x_k^m p_k$.

[I] [S] II. 7) Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer les valeurs propres x_1, x_2, x_3 de A .
 b) Calculer L_1, L_2, L_3 et expliciter les matrices $P_1 = \tilde{L}_1(A), P_2 = \tilde{L}_2(A)$ et $P_3 = \tilde{L}_3(A)$.
 c) Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

Partie III

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = O$ et $u^{n-1} \neq O$.

[I] [S] III. 1) a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que famille $(u^{k-1}(x))_{k \in \mathbb{N}_n}$ soit libre.
 b) Établir que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \tilde{P}(u) = O \iff X^n$ divise P .
 c) Montrer que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset \implies n \leq \frac{N+1}{2}$.

[I] [S] III. 2) a) Déterminer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que pour tout réel $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$
 b) Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Montrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

[I] [S] III. 3) On prend dans toute la suite $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on pose $Q_{n,\omega} = \omega P_n \left(\frac{X}{\omega^2} \right)$.

- a) Montrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.
 b) Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) \neq \emptyset$.

[I] [S] III. 4) On suppose ici que $n = N$ et on choisit $x \in E$ comme en III.1.a. Soit $g \in \mathcal{R}(\omega^2 e + u)$.
 a) Montrer que g commute avec u .
 b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = \tilde{P}(u)(x)$. Établir que $g = \tilde{P}(u)$.
 c) Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) = \{\tilde{Q}_{n,\omega}(u), -\tilde{Q}_{n,\omega}(u)\}$.

[I] [S] III. 5) Application : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

[I] [S] III. 6) On suppose que $n \geq 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$. Montrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

[I] [S] III. 7) a) Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Trouver la forme générale des éléments de $\mathcal{R}(A)$.

Partie IV

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit $P_f = \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{\alpha_k}$ où les x_k sont les valeurs propres de f deux à deux distinctes et les α_k leurs ordres de multiplicité respectifs. On pose $E_k = \text{Ker}(f - x_k e)^{\alpha_k}$ et on rappelle que $E = \bigoplus_{k=1}^n E_k$.

[I] [S] IV. 1) a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Φ_f tel que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\tilde{P}(f) = O$ soit exactement l'ensemble des multiples de Φ_f dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Montrer que $\Phi_f = \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{\beta_k}$ avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] IV. 2) Montrer que si $g \in \mathcal{R}(f)$ alors $g \langle E_k \rangle \subset E_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] IV. 3) a) Montrer que $x_1 = 0$ et $\beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2} \implies \mathcal{R}(f) = \emptyset$.

b) Montrer que $0 \notin \text{Sp}(f) \implies \mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

c) Montrer que si $x_1 = 0$ et $\beta_1 \geq 2$ alors ou bien $\mathcal{R}(f) = \emptyset$ ou bien $\mathcal{R}(f)$ admet une infinité d'éléments.

[I] [S] IV. 4) On suppose ici que $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

a) Montrer que $0 \notin \text{Sp}(f) \implies \text{Card } \mathcal{R}(f) = 2^n$.

b) Montrer que $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1 \implies \text{Card } \mathcal{R}(f) = 2^{n-1}$.



Indications ou résultats

Partie I

[Q] I. 1) $(f - ae)(f - be) = O$.

[Q] I. 2) a) Résoudre le système $\begin{cases} p + q = e \\ ap + bq = f \end{cases}$ par rapport aux inconnues p et q .

b) Les racines d'un polynôme annulateur de f sont valeurs propres de f . Justifier que a et b sont effectivement valeurs propres de f .

c) Montrer que $f^{-1} = a^{-1}p + b^{-1}q$.

[Q] I. 3) Utiliser I.1 et I.2.b.

[Q] I. 4) a) Le sous-espace F est stable par produit. Montrer que (p, q) est libre.

b) On trouve les quatre projecteurs O, p, q et e .

c) On trouve quatre racines carrées pour f si $ab \neq 0$ et deux si $ab = 0$.

[Q] I. 5) a) $J^m = 3^{m-1}J$ si $m \in \mathbb{N}^*$, puis $A^m = I_3 + (4^m - 1)\frac{J}{3}$.

b) $B = I_3 - \frac{J}{3}$, $C = \frac{J}{3}$, $a = 1$ et $b = 4$.

c) Ce sont les quatre matrices $\pm B \pm 2C$.

Partie II

[Q] II. 1) Pour $P = \sum_{m=0}^d a_m X^m \in \mathbb{C}[X]$, permuter les sommes $\sum_{m=0}^d$ et $\sum_{k=1}^n$ dans $\tilde{P}(f)$.

[Q] II. 2) a) Appliquer II.1. En déduire que f est diagonalisable.

b) Utiliser la relation $\tilde{L}_k(x_l) = \delta_{kl}$ et II.1.

c) Justifier d'abord l'inclusion $\text{Sp}(f) \subset \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$ puis remarquer l'égalité $(f - x_k e)p_k = O$ pour l'inclusion inverse.

[Q] II. 3) Utiliser II.1 (f est diagonalisable) et II.2.c ce qui donne $E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker}(f - x_k e)$. Conclure avec II.2.b.

[Q] II. 4) a) $\dim F = n$.

b) $\text{Card}(\mathcal{R}(f) \cap F) = 2^n$ si $O \notin \text{Sp}(f)$ et 2^{n-1} si $0 \in \text{Sp}(f)$.

c) Il y a autant de projecteurs dans F que de choix de parties dans $\text{Sp}(f)$, c'est à dire 2^n .

[Q] II. 5) a) Montrer que F est un sous-espace de l'espace des endomorphismes commutant avec f et que ce dernier espace est de dimension $\dim E = N = n = \dim F$.