# Racines carrées dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ lorsque la dimension de $E$ est finie

**ENSI M 1988, (Math 2)**

*Notations* :
Dans tout le problème $n$ et $N$ sont deux entiers naturels non nuls.

- $E$ est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$.
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E. On note $O$ l'endomorphisme nul et $e$ l'endomorphisme identité de $E$.
- $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré au plus $n$.
- Étant donnés $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on désigne par
  - $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de $f$,
  - $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble des "racines carrées de $f$" dans $\mathcal{L}(E)$ : $\mathcal{R}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$,
  - $\widetilde{P}(f)$ l'endomorphisme de $E$ défini par $\widetilde{P}(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = e$).
- $F$ et $G$ étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$, on appelle projecteur sur $F$ parallèlement à $G$, l'endomorphisme $p_{F,G}$ de $E$ tel que : $\forall (x, y) \in F \times G,\ p_{F,G}(x+y) = x$.
- $\mathbb{N}_n$ est le sous-ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ de $\mathbb{N}^*$.

## Partie I

Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls $p$ et $q$ tels que

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} p + q = e \\ ap + bq = f \end{cases}$$

[I] [S] **I.1)** Calculer $(f - ae)(f - be)$. En déduire que $f$ est diagonalisable.

[I] [S] **I.2)** **a)** Établir que $pq = qp = O$, $p^2 = p$, $q^2 = q$.

**b)** Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.

**c)** On suppose que $ab \neq 0$. Montrer que $f$ est bijective et que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f^m = a^m p + b^m q.$$

[I] [S] **I.3)** Montrer que $p$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - ae)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - be)$ et que $q$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - be)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - ae)$.

[I] [S] **I.4)** On note $F$ le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $p$ et $q$.

**a)** Montrer que $F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.

**b)** Déterminer les projecteurs qui sont éléments de $F$.

**c)** Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

[I] [S] **I.5)** *Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**a)** Calculer $J^m$ pour $m \in \mathbb{N}$. En déduire $A^m$ en fonction de $I_3$ et $J$.

**b)** Montrer qu'il existe deux couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tels que $\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = a^m B + b^m C$.

**c)** Déterminer en fonction de $B$ et $C$ quatre matrices $M$ telles que $M^2 = A$.

## Partie II

Soit $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une famille de $n$ endomorphismes non nuls de $E$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de $n$ nombres complexes dintincts, et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que, pour tout entier naturel $m$, $\quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k$.

[I] [S] **II.1)** Montrer que $\quad \forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \widetilde{P}(f) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}(x_k) p_k$.

[I] [S] **II.2)** On pose $\quad \Pi = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, $\quad \Pi_l = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (X - x_k)$ et $L_l = \dfrac{\Pi_l}{\widetilde{\Pi}_l(x_l)}$.

**a)** Calculer $\widetilde{\Pi}(f)$. Qu'en déduit-on pour $f$ ?

**b)** Montrer que $\quad \forall k \in \mathbb{N}_n, \quad p_k = \widetilde{L}_k(f)$. Vérifier que $\quad \forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2, \quad p_k p_l = \delta_{kl} p_k$ où $\delta_{kl}$ est le symbole de Kronecker.

**c)** Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$.

[I] [S] **II.3)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $p_k$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - x_k e)$ parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \mathrm{Ker}(f - x_l e)$.

[I] [S] **II.4)** On désigne par $F$ le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

**a)** Quelle est la dimension de $F$ ?

**b)** Déterminer le cardinal de $\mathcal{R}(f) \cap F$.

**c)** Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ? (On précisera le nombre de ces projecteurs ainsi que leurs éléments caractéristiques)

[I] [S] **II . 5)** On suppose ici que $n = N$.

**a)** Montrer que $\forall g \in \mathcal{L}(E)\,,\quad gf = fg \Longleftrightarrow g \in F$.

**b)** Quel est le cardinal de $\mathcal{R}(f)$ ?

[I] [S] **II . 6)** Soit $h$ un endomorphisme diagonalisable de $E$ tel que $\mathrm{Sp}(h) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$. Montrer qu'il existe une famille $(q_1\,,\, q_2\,,\, \ldots\,,\, q_n)$ de $n$ endomorphismes non nuls de $E$, tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}\,,\quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k\,.$$

[I] [S] **II . 7)** *Exemple* : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a)** Déterminer les valeurs propres $x_1$, $x_2$, $x_3$ de $A$.

**b)** Calculer $L_1$, $L_2$, $L_3$ et expliciter les matrices $P_1 = \widetilde{L}_1(A)$, $P_2 = \widetilde{L}_2(A)$ et $P_3 = \widetilde{L}_3(A)$.

**c)** Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

## Partie III

Soit $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $u^n = O$ et $u^{n-1} \neq O$.

[I] [S] **III . 1)** **a)** Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que famille $\big(u^{k-1}(x)\big)_{k\in\mathbb{N}_n}$ soit libre.

**b)** Établir que $\forall P \in \mathbb{C}[X]\,,\ \widetilde{P}(u) = O \Longleftrightarrow X^n$ divise $P$.

**c)** Montrer que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset \Longrightarrow n \leqslant \dfrac{N+1}{2}$.

[I] [S] **III . 2)** **a)** Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que pour tout réel $x \in\, ]-1\,,\,1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\,.$$

**b)** Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Montrer que $X^n$ divise $P_n^2 - X - 1$.

[I] [S] **III . 3)** On prend dans toute la suite $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on pose $Q_{n,\omega} = \omega\, P_n\left(\dfrac{X}{\omega^2}\right)$.

**a)** Montrer que l'ensemble des polynômes $Q$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que $X^n$ divise $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}\,,\, -Q_{n,\omega}\}$.

**b)** Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) \neq \emptyset$.

[I] [S] **III . 4)** On suppose ici que $n = N$ et on choisit $x \in E$ comme en III.1.a. Soit $g \in \mathcal{R}(\omega^2 e + u)$.

**a)** Montrer que $g$ commute avec $u$.

**b)** Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = \widetilde{P}(u)(x)$. Établir que $g = \widetilde{P}(u)$.

**c)** Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) = \{\widetilde{Q}_{n,\omega}(u)\,,\, -\widetilde{Q}_{n,\omega}(u)\}$.

[I] [S] **III . 5)** *Application* : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

[I] [S] **III . 6)** On suppose que $n \geqslant 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$. Montrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

[I] [S] **III . 7)** **a)** Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** Trouver la forme générale des éléments de $\mathcal{R}(A)$.

## Partie IV

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de $f$ s'écrit $P_f = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)^{\alpha_k}$ où les $x_k$ sont les valeurs propres de $f$ deux à deux distinctes et les $\alpha_k$ leurs ordres de multiplicité respectifs. On pose $E_k = \mathrm{Ker}(f - x_k e)^{\alpha_k}$ et on rappelle que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

[I] [S] **IV . 1)** **a)** Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $\Phi_f$ tel que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\widetilde{P}(f) = O$ soit exactement l'ensemble des multiples de $\Phi_f$ dans $\mathbb{C}[X]$.

**b)** Montrer que $\Phi_f = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)^{\beta_k}$ avec $1 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] **IV . 2)** Montrer que si $g \in \mathcal{R}(f)$ alors $g < E_k > \subset E_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] **IV . 3)** **a)** Montrer que $x_1 = 0$ et $\beta_1 > \dfrac{\alpha_1 + 1}{2} \Longrightarrow \mathcal{R}(f) = \emptyset$.

**b)** Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Longrightarrow \mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

**c)** Montrer que si $x_1 = 0$ et $\beta_1 \geqslant 2$ alors ou bien $\mathcal{R}(f) = \emptyset$ ou bien $\mathcal{R}(f)$ admet une infinité d'éléments.

[I] [S] **IV . 4)** On suppose ici que $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

**a)** Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Longrightarrow \mathrm{Card}\,\mathcal{R}(f) = 2^n$.

**b)** Montrer que $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1 \Longrightarrow \mathrm{Card}\,\mathcal{R}(f) = 2^{n-1}$.

# Indications ou résultats

## Partie I

[Q] **I.1)** $(f - ae)(f - be) = O$ .

[Q] **I.2)** **a)** Résoudre le système $\begin{cases} p + q = e \\ ap + bq = f \end{cases}$ par rapport aux inconnues $p$ et $q$ .

**b)** Les racines d'un polynôme annulateur de $f$ sont valeurs propres de $f$ . Justifier que $a$ et $b$ sont effectivement valeurs propres de $f$ .

**c)** Montrer que $f^{-1} = a^{-1}p + b^{-1}q$ .

[Q] **I.3)** Utiliser I.1 et I.2.b.

[Q] **I.4)** **a)** Le sous-espace $F$ est stable par produit. Montrer que $(p, q)$ est libre.

**b)** On trouve les quatre projecteurs $O$ , $p$ , $q$ et $e$ .

**c)** On trouve quatre racines carrées pour $f$ si $ab \neq 0$ et deux si $ab = 0$ .

[Q] **I.5)** **a)** $J^m = 3^{m-1}J$ si $m \in \mathbb{N}^*$ , puis $A^m = I_3 + (4^m - 1)\dfrac{J}{3}$ .

**b)** $B = I_3 - \dfrac{J}{3}$ , $C = \dfrac{J}{3}$ , $a = 1$ et $b = 4$ .

**c)** Ce sont les quatre matrices $\pm B \pm 2C$ .

## Partie II

[Q] **II.1)** Pour $P = \displaystyle\sum_{m=0}^{d} a_m X^m \in \mathbb{C}[X]$ , permuter les sommes $\displaystyle\sum_{m=0}^{d}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ dans $\widetilde{P}(f)$ .

[Q] **II.2)** **a)** Appliquer II.1. En déduire que $f$ est diagonalisable.

**b)** Utiliser la relation $\widetilde{L}_k(x_l) = \delta_{kl}$ et II.1.

**c)** Justifier d'abord l'inclusion $\mathrm{Sp}(f) \subset \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$ puis remarquer l'égalité $(f - x_k e)p_k = O$ pour l'inclusion inverse.

[Q] **II.3)** Utiliser II.1 ($f$ est diagonalisable) et II.2.c ce qui donne $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f - x_k e)$ . Conclure avec II.2.b.

[Q] **II.4)** **a)** $\dim F = n$ .

**b)** $\mathrm{Card}(\mathcal{R}(f) \cap F) = 2^n$ si $O \notin \mathrm{Sp}(f)$ et $2^{n-1}$ si $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ .

**c)** Il y a autant de projecteurs dans $F$ que de choix de parties dans $\mathrm{Sp}(f)$ , c'est à dire $2^n$ .

[Q] **II.5)** **a)** Montrer que $F$ est un sous-espace de l'espace des endomorphismes commutant avec $f$ et que ce dernier espace est de dimension $\dim E = N = n = \dim F$ .