Racines carrées dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ lorsque la dimension de E est finie

ENSI M 1988, (Math 2)

Notations :
Dans tout le problème n et N sont deux entiers naturels non nuls.

- E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$.
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E. On note O l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité de E.
- $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré au plus n.
- Étant donnés $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on désigne par
  - ◇ $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f,
  - ◇ $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble des "racines carrées de f" dans $\mathcal{L}(E)$: $\mathcal{R}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$,
  - ◇ $\widetilde{P}(f)$ l'endomorphisme de E défini par $\widetilde{P}(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = e$).
- F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on appelle projecteur sur F parallèlement à G, l'endomorphisme $p_{F,G}$ de E tel que : $\forall (x, y) \in F \times G$, $p_{F,G}(x+y) = x$.
- $\mathbb{N}_n$ est le sous-ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ de $\mathbb{N}^*$.

Partie I

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q tels que

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} p + q = e \\ ap + bq = f \end{cases}$$

[I] [S] **I.1)** Calculer $(f - ae)(f - be)$. En déduire que f est diagonalisable.

[I] [S] **I.2)** **a)** Établir que $pq = qp = O$, $p^2 = p$, $q^2 = q$.

b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.

c) On suppose que $ab \neq 0$. Montrer que f est bijective et que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f^m = a^m p + b^m q.$$

[I] [S] **I.3)** Montrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - ae)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - be)$ et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - be)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - ae)$.

[I] [S] **I.4)** On note F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q.

a) Montrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.

b) Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F.

c) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

[I] [S] **I.5)** *Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$. En déduire A^m en fonction de I_3 et J.

b) Montrer qu'il existe deux couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tels que $\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = a^m B + b^m C$.

c) Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

Partie II

Soit $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une famille de n endomorphismes non nuls de E, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de n nombres complexes dintincts, et f un endomorphisme de E tel que, pour tout entier naturel m, $\quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k$.

[I] [S] **II.1)** Montrer que $\quad \forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \widetilde{P}(f) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}(x_k) p_k$.

[I] [S] **II.2)** On pose $\quad \Pi = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, $\quad \Pi_l = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (X - x_k)$ et $L_l = \dfrac{\Pi_l}{\widetilde{\Pi}_l(x_l)}$.

a) Calculer $\widetilde{\Pi}(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?

b) Montrer que $\quad \forall k \in \mathbb{N}_n, \quad p_k = \widetilde{L}_k(f)$. Vérifier que $\quad \forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2, \quad p_k p_l = \delta_{kl} p_k$ où δ_{kl} est le symbole de Kronecker.

c) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$.

[I] [S] **II.3)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, p_k est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - x_k e)$ parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \mathrm{Ker}(f - x_l e)$.

[I] [S] **II.4)** On désigne par F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Déterminer le cardinal de $\mathcal{R}(f) \cap F$.

c) Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ? (On précisera le nombre de ces projecteurs ainsi que leurs éléments caractéristiques)

[I] [S] **II.5)** On suppose ici que $n = N$.

a) Montrer que $\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad gf = fg \Longleftrightarrow g \in F$.

b) Quel est le cardinal de $\mathcal{R}(f)$?

[I] [S] **II.6)** Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que $\mathrm{Sp}(h) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$. Montrer qu'il existe une famille $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ de n endomorphismes non nuls de E, tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k .$$

[I] [S] **II.7)** *Exemple* : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres x_1, x_2, x_3 de A.

b) Calculer L_1, L_2, L_3 et expliciter les matrices $P_1 = \widetilde{L}_1(A)$, $P_2 = \widetilde{L}_2(A)$ et $P_3 = \widetilde{L}_3(A)$.

c) Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

Partie III

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = O$ et $u^{n-1} \neq O$.

[I] [S] **III.1)** **a)** Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que famille $\left(u^{k-1}(x)\right)_{k \in \mathbb{N}_n}$ soit libre.

b) Établir que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \widetilde{P}(u) = O \Longleftrightarrow X^n$ divise P.

c) Montrer que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset \Longrightarrow n \leqslant \dfrac{N+1}{2}$.

[I] [S] **III.2)** **a)** Déterminer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que pour tout réel $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k .$$

b) Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Montrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

[I] [S] **III.3)** On prend dans toute la suite $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on pose $Q_{n,\omega} = \omega\, P_n\left(\dfrac{X}{\omega^2}\right)$.

a) Montrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.

b) Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) \neq \emptyset$.

[I] [S] **III.4)** On suppose ici que $n = N$ et on choisit $x \in E$ comme en III.1.a. Soit $g \in \mathcal{R}(\omega^2 e + u)$.

a) Montrer que g commute avec u.

b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = \widetilde{P}(u)(x)$. Établir que $g = \widetilde{P}(u)$.

c) Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) = \{\widetilde{Q}_{n,\omega}(u), -\widetilde{Q}_{n,\omega}(u)\}$.

[I] [S] **III . 5)** *Application* : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

[I] [S] **III . 6)** On suppose que $n \geqslant 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$. Montrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

[I] [S] **III . 7)** **a)** Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Trouver la forme générale des éléments de $\mathcal{R}(A)$.

Partie IV

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit $P_f = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)^{\alpha_k}$ où les x_k sont les valeurs propres de f deux à deux distinctes et les α_k leurs ordres de multiplicité respectifs. On pose $E_k = \operatorname{Ker}(f - x_k e)^{\alpha_k}$ et on rappelle que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

[I] [S] **IV . 1)** **a)** Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Φ_f tel que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\widetilde{P}(f) = O$ soit exactement l'ensemble des multiples de Φ_f dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Montrer que $\Phi_f = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)^{\beta_k}$ avec $1 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] **IV . 2)** Montrer que si $g \in \mathcal{R}(f)$ alors $g < E_k > \subset E_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] **IV . 3)** **a)** Montrer que $x_1 = 0$ et $\beta_1 > \dfrac{\alpha_1 + 1}{2} \Longrightarrow \mathcal{R}(f) = \emptyset$.

b) Montrer que $0 \notin \operatorname{Sp}(f) \Longrightarrow \mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

c) Montrer que si $x_1 = 0$ et $\beta_1 \geqslant 2$ alors ou bien $\mathcal{R}(f) = \emptyset$ ou bien $\mathcal{R}(f)$ admet une infinité d'éléments.

[I] [S] **IV . 4)** On suppose ici que $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

a) Montrer que $0 \notin \operatorname{Sp}(f) \Longrightarrow \operatorname{Card} \mathcal{R}(f) = 2^n$.

b) Montrer que $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1 \Longrightarrow \operatorname{Card} \mathcal{R}(f) = 2^{n-1}$.

♦ ♦
♦

Indications ou résultats

Partie I

[Q] **I.1)** $(f-ae)(f-be)=O$.

[Q] **I.2)** **a)** Résoudre le système $\begin{cases} p+q=e \\ ap+bq=f \end{cases}$ par rapport aux inconnues p et q.

b) Les racines d'un polynôme annulateur de f sont valeurs propres de f. Justifier que a et b sont effectivement valeurs propres de f.

c) Montrer que $f^{-1}=a^{-1}p+b^{-1}q$.

[Q] **I.3)** Utiliser I.1 et I.2.b.

[Q] **I.4)** **a)** Le sous-espace F est stable par produit. Montrer que $(p\,,\,q)$ est libre.

b) On trouve les quatre projecteurs O, p, q et e.

c) On trouve quatre racines carrées pour f si $ab\neq 0$ et deux si $ab=0$.

[Q] **I.5)** **a)** $J^m=3^{m-1}J$ si $m\in\mathbb{N}^*$, puis $A^m=I_3+(4^m-1)\dfrac{J}{3}$.

b) $B=I_3-\dfrac{J}{3}$, $C=\dfrac{J}{3}$, $a=1$ et $b=4$.

c) Ce sont les quatre matrices $\pm B\pm 2C$.

Partie II

[Q] **II.1)** Pour $P=\displaystyle\sum_{m=0}^{d}a_mX^m\in\mathbb{C}[X]$, permuter les sommes $\displaystyle\sum_{m=0}^{d}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ dans $\widetilde{P}(f)$.

[Q] **II.2)** **a)** Appliquer II.1. En déduire que f est diagonalisable.

b) Utiliser la relation $\widetilde{L}_k(x_l)=\delta_{kl}$ et II.1.

c) Justifier d'abord l'inclusion $\mathrm{Sp}(f)\subset\{x_k\mid k\in\mathbb{N}_n\}$ puis remarquer l'égalité $(f-x_ke)p_k=O$ pour l'inclusion inverse.

[Q] **II.3)** Utiliser II.1 (f est diagonalisable) et II.2.c ce qui donne $E=\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{Ker}(f-x_ke)$. Conclure avec II.2.b.

[Q] **II.4)** **a)** $\dim F=n$.

b) $\mathrm{Card}(\mathcal{R}(f)\cap F)=2^n$ si $O\notin\mathrm{Sp}(f)$ et 2^{n-1} si $0\in\mathrm{Sp}(f)$.

c) Il y a autant de projecteurs dans F que de choix de parties dans $\mathrm{Sp}(f)$, c'est à dire 2^n.

[Q] **II.5)** **a)** Montrer que F est un sous-espace de l'espace des endomorphismes commutant avec f et que ce dernier espace est de dimension $\dim E=N=n=\dim F$.