



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Samedi 15 Mai 1999, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

La partie 1 présente la loi du χ^2 (lire khi-deux) et certaines de ses propriétés. La partie 2 présente une application de la loi du χ^2 . La partie 3 considère, sur un exemple, un test statistique, reposant sur les résultats des parties 1 et 2.

Notation

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, on note $cov(X, Y)$ leur covariance, si celle-ci existe.

Partie 1

Soit r un entier non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi du χ^2 à r degrés de liberté si et seulement si X suit la loi Γ de paramètres 2 et $\frac{r}{2}$, c'est-à-dire si X admet pour densité la fonction f_r définie par :

$$\forall x > 0, f_r(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) 2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \forall x \leq 0, f_r(x) = 0.$$

1) Déterminer l'espérance et la variance d'une variable X suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté.

2) a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, pour tout entier n non nul :
$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda e^{\lambda-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

b) Soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et X_{2n} une variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté. Montrer que $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.

c) Ecrire une fonction en langage Pascal de paramètres n entier et x réel qui retourne la valeur de $P(X_{2n} > x)$.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net