CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Samedi 15 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

La partie 1 présente la loi du χ^2 (lire khi-deux) et certaines de ses propriétés. La partie 2 présente une application de la loi du χ^2. La partie 3 considère, sur un exemple, un test statistique, reposant sur les résultats des parties 1 et 2.

Notation
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, on note $cov(X,Y)$ leur covariance, si celle-ci existe.

Partie 1

Soit r un entier non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi du χ^2 à r degrés de liberté si et seulement si X suit la loi Γ de paramètres 2 et $\frac{r}{2}$, c'est-à-dire si X admet pour densité la fonction f_r définie par :

$$\forall x > 0,\quad f_r(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \leq 0,\quad f_r(x) = 0 .$$

1) Déterminer l'espérance et la variance d'une variable X suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté.

2) a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, pour tout entier n non nul : $\quad e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k\,!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda - t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)\,!} dt$.

b) Soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et X_{2n} une variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté. Montrer que $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.

c) Ecrire une fonction en langage Pascal de paramètres n entier et x réel qui retourne la valeur de $P(X_{2n} > x)$.