

Matrices et déterminants dépendant d'un paramètre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\begin{cases} a_{ij} = -1 & \text{si } j < i \\ a_{ij} = 0 & \text{si } j = i \\ a_{ij} = 1 & \text{si } j > i \end{cases}$. Donc $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

Pour tout α de \mathbb{C} , on pose $M_n(\alpha) = A_n + \alpha I_n$ et $D_n(\alpha) = \det M_n(\alpha)$.

On note f_α l'endomorphisme de \mathbb{C}^n de matrice $M_n(\alpha)$ dans la base canonique.

Les parties I et II sont totalement indépendantes, et devront être traitées comme telles.

Première Partie

On note $u = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n .

Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on pose $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $\omega_k = \exp(2i\theta_k)$ et $\alpha_k = -i \cotan \theta_k$.

1. Montrer que l'égalité $f_\alpha(u) = \vec{0}$ équivaut au système $\begin{cases} (\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + \dots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}$.
Vérifier que f_1 est un automorphisme de \mathbb{C}^n .

2. Pour tout α distinct de 1, on pose $q_\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$.

(a) Montrer que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors f_α est un automorphisme de \mathbb{C}^n .

(b) Vérifier que $q_\alpha^n = -1 \Leftrightarrow \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

(c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = \alpha_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

Montrer que $\ker f_{\alpha_k}$ est la droite engendrée par $u_k = (1, \omega_k, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{n-1})$.

(d) Préciser le rang de l'application f_α , suivant les valeurs de α .

3. On reprend ici les notations de la question précédente, et α est quelconque dans \mathbb{C} .

(a) Montrer que les vecteurs u_1, u_2, \dots, u_n forment une base de \mathbb{C}^n .

(b) Préciser la matrice de f_α dans cette base.

(c) En déduire que le déterminant de f_α est égal à $\frac{(\alpha-1)^n + (\alpha+1)^n}{2}$.

Deuxième Partie

Dans cette partie, on voit deux méthodes distinctes de calcul de $D_n(\alpha)$.

1. (a) Calculer $D_1(\alpha)$ et $D_2(\alpha)$.

Montrer que si $n \geq 3$, alors $D_n(\alpha) - 2\alpha D_{n-1}(\alpha) + (\alpha^2 - 1)D_{n-2}(\alpha) = 0$.

(b) En déduire l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de \mathbb{N} et tout α de \mathbb{C} .

2. Pour tout $n \geq 1$, on note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.

Pour tous complexes α et x , on pose $\Delta_n(\alpha, x) = \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$.

(a) Montrer que $x \mapsto \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$ est une fonction affine de la variable x .

(b) Retrouver l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de \mathbb{N} et tout α de \mathbb{C} .

3. (a) Montrer que si $D_n(\alpha) = 0$ alors $D_{n-1}(\alpha) \neq 0$.

(b) En déduire le rang de la matrice $M_n(\alpha)$ quand elle n'est pas inversible.

4. Dans cette question, on fixe $n \geq 1$, et on définit les θ_k et les α_k comme au début de la partie I.

Montrer que les solutions de $D_n(\alpha) = 0$ sont les $\alpha_k = -i \cotan \theta_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

Corrigé du problème

Première Partie

1. Soit U le vecteur-colonne représentant le vecteur u dans la base canonique de \mathbb{C}^n .

Il s'agit de résoudre la système $M_n(\alpha)U = 0$.

On applique à $M_n(\alpha)$ les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$, de $i = 1$ à $i = n - 1$.

On passe ainsi de $M_n(\alpha)$ à $M'_n(\alpha)$, avec :

$$M_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & \alpha & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } M'_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha+1 & 1-\alpha \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

On sait qu'il existe une matrice inversible P telle que $M'_n(\alpha) = PM_n(\alpha)$, car on a procédé à des opérations élémentaires sur les lignes.

Il revient donc au même de résoudre le système $M'_n(\alpha)U = 0$.

$$\text{Or } M'_n(\alpha)U = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha+1 & 1-\alpha \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)x_1 - (\alpha-1)x_2 \\ (\alpha+1)x_2 - (\alpha-1)x_3 \\ \vdots \\ (\alpha+1)x_{n-1} - (\alpha-1)x_n \\ \alpha x_n - x_1 - \dots - x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc l'équivalence : } f_\alpha(u) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1} \text{ si } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}.$$

$$\text{Si } \alpha = 1, \text{ le système précédent donne } \begin{cases} 0 = 2x_{k-1} \text{ si } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + \dots + x_{n-1} = x_n \end{cases} \text{ donc } u = \vec{0}.$$

Autrement dit, l'application f_1 est un automorphisme de \mathbb{C}^n .

2. (a) On sait que si $\alpha = 1$ alors $\ker f_\alpha = \{\vec{0}\}$.

Pour trouver les α tels que $\ker f_\alpha \neq \{\vec{0}\}$, on peut donc supposer $\alpha \neq 1$.

Les égalités $(\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1}$ ($2 \leq k \leq n$) s'écrivent alors $x_k = q_\alpha x_{k-1}$.

Ces égalités donnent immédiatement : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = q_\alpha^{k-1} x_1$.

L'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \alpha x_n$ s'écrit alors $x_1(1 + q_\alpha + \dots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha q_\alpha^{n-1} x_n$.

On note que $q_\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \neq 1$ et que réciproquement $\alpha = \frac{q_\alpha+1}{q_\alpha-1}$.

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} x_1(1 + q_\alpha + \dots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha q_\alpha^{n-1} x_n &\Leftrightarrow x_1 \frac{q_\alpha^{n-1} - 1}{q_\alpha - 1} = \frac{(q_\alpha + 1)q_\alpha^{n-1}}{q_\alpha - 1} x_1 \\ &\Leftrightarrow (q_\alpha^n + 1)x_1 = 0 \end{aligned}$$

En résumé, $f_\alpha(u) = \vec{0} \Leftrightarrow u = x_1(1, q_\alpha, \dots, q_\alpha^{n-1})$ avec $(q_\alpha^n + 1)x_1 = 0$.

On constate que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors $x_1 = 0$, puis $x_2 = \dots = x_n = 0$.

Autrement dit, si $q_\alpha^n \neq -1$, $\ker f_\alpha = \{\vec{0}\}$ donc f_α est un automorphisme de \mathbb{C}^n .