Matrices et déterminants dépendant d'un paramètre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\begin{cases} a_{ij} = -1 \text{ si } j < i \\ a_{ij} = 0 \text{ si } j = i \\ a_{ij} = 1 \text{ si } j > i \end{cases}$. Donc $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \ldots & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour tout α de $\mathbb{C}$, on pose $M_n(\alpha) = A_n + \alpha I_n$ et $D_n(\alpha) = \det M_n(\alpha)$.

On note f_α l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice $M_n(\alpha)$ dans la base canonique.

Les parties I et II sont totalement indépendantes, et devront être traitées comme telles.

Première Partie

On note $u = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$.

Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $\omega_k = \exp(2i\theta_k)$ et $\alpha_k = -i\,\text{cotan}\theta_k$.

1. Montrer que l'égalité $f_\alpha(u) = \overrightarrow{0}$ équivaut au système $\begin{cases} (\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1} \text{ si } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}$

   Vérifier que f_1 est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.

2. Pour tout α distinct de 1, on pose $q_\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$.
   (a) Montrer que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors f_α est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.
   (b) Vérifier que $q_\alpha^n = -1 \Leftrightarrow \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.
   (c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = \alpha_k$, avec $1 \leq k \leq n$.
   Montrer que $\ker f_{\alpha_k}$ est la droite engendrée par $u_k = (1, \omega_k, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{n-1})$.
   (d) Préciser le rang de l'application f_α, suivant les valeurs de α.

3. On reprend ici les notations de la question précédente, et α est quelconque dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ forment une base de $\mathbb{C}^n$.
   (b) Préciser la matrice de f_α dans cette base.
   (c) En déduire que le déterminant de f_α est égal à $\dfrac{(\alpha-1)^n + (\alpha+1)^n}{2}$.

Deuxième Partie

Dans cette partie, on voit deux méthodes distinctes de calcul de $D_n(\alpha)$.

1. (a) Calculer $D_1(\alpha)$ et $D_2(\alpha)$.
   Montrer que si $n \geq 3$, alors $D_n(\alpha) - 2\alpha D_{n-1}(\alpha) + (\alpha^2 - 1)D_{n-2}(\alpha) = 0$.
   (b) En déduire l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{C}$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.
   Pour tous complexes α et x, on pose $\Delta_n(\alpha, x) = \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$.
   (a) Montrer que $x \mapsto \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$ est une fonction affine de la variable x.
   (b) Retrouver l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{C}$.

3. (a) Montrer que si $D_n(\alpha) = 0$ alors $D_{n-1}(\alpha) \neq 0$.
   (b) En déduire le rang de la matrice $M_n(\alpha)$ quand elle n'est pas inversible.

4. Dans cette question, on fixe $n \geq 1$, et on définit les θ_k et les α_k comme au début de la partie I.
   Montrer que les solutions de $D_n(\alpha) = 0$ sont les $\alpha_k = -i\,\text{cotan}\theta_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

Corrigé du problème

Première Partie

1. Soit U le vecteur-colonne représentant le vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Il s'agit de résoudre la système $M_n(\alpha)U = 0$.
On applique à $M_n(\alpha)$ les opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_{i+1}$, de $i = 1$ à $i = n-1$.
On passe ainsi de $M_n(\alpha)$ à $M'_n(\alpha)$, avec :
$$M_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ -1 & \alpha & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ -1 & \ldots & \ldots & -1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } M'_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1-\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha+1 & 1-\alpha \\ -1 & \ldots & \ldots & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$
On sait qu'il existe une matrice inversible P telle que $M'_n(\alpha) = PM_n(\alpha)$, car on a procédé à des opérations élémentaires sur les lignes.
Il revient donc au même de résoudre le système $M'_n(\alpha)U = 0$.
$$\text{Or } M'_n(\alpha)U = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1-\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha+1 & 1-\alpha \\ -1 & \ldots & \ldots & -1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)x_1 - (\alpha-1)x_2 \\ (\alpha+1)x_2 - (\alpha-1)x_3 \\ \vdots \\ (\alpha+1)x_{n-1} - (\alpha-1)x_n \\ \alpha x_n - x_1 - \cdots - x_{n-1} \end{pmatrix}$$
On a donc l'équivalence : $f_\alpha(u) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1} \text{ si } 2 \le k \le n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}$.
Si $\alpha = 1$, le système précédent donne $\begin{cases} 0 = 2x_{k-1} \text{ si } 2 \le k \le n \\ x_1 + \ldots + x_{n-1} = x_n \end{cases}$ donc $u = \overrightarrow{0}$.
Autrement dit, l'application f_1 est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.

2. (a) On sait que si $\alpha = 1$ alors $\ker f_\alpha = \{\overrightarrow{0}\}$.
Pour trouver les α tels que $\ker f_\alpha \neq \{\overrightarrow{0}\}$, on peut donc supposer $\alpha \neq 1$.
Les égalités $(\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1}$ $(2 \le k \le n)$ s'écrivent alors $x_k = q_\alpha\, x_{k-1}$.
Ces égalités donnent immédiatement : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ x_k = q_\alpha^{k-1} x_1$.
L'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \alpha x_n$ s'écrit alors $x_1(1 + q_\alpha + \cdots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha q_\alpha^{n-1} x_n$.
On note que $q_\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} \neq 1$ et que réciproquement $\alpha = \dfrac{q_\alpha+1}{q_\alpha-1}$.
Dans ces conditions :
$$\begin{aligned} x_1(1 + q_\alpha + \cdots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha\, q_\alpha^{n-1} x_1 \quad &\Leftrightarrow x_1 \frac{q_\alpha^{n-1} - 1}{q_\alpha - 1} = \frac{(q_\alpha+1)q_\alpha^{n-1}}{q_\alpha - 1} x_1 \\ &\Leftrightarrow (q_\alpha^n + 1)x_1 = 0 \end{aligned}$$
En résumé, $f_\alpha(u) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u = x_1(1, q_\alpha, \ldots, q_\alpha^{n-1})$ avec $(q_\alpha^n + 1)x_1 = 0$.
On constate que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors $x_1 = 0$, puis $x_2 = \ldots = x_n = 0$.
Autrement dit, si $q_\alpha^n \neq -1$, $\ker f_\alpha = \{\overrightarrow{0}\}$ donc f_α est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.