

## Triples rectangulaires

- On note  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.  
On note  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .
- On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- On appelle *triplet rectangulaire* tout triplet  $(x, y, z)$  d'entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble tels que  $x^2 + y^2 = z^2$ . On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble de ces triplets.

### Première partie

1. Calculer les inverses des matrices  $A$ ,  $B$ , et  $C$ . [S]
2. Déterminer les  $Q$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $x^2 + y^2 - z^2 = (x \ y \ z) Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .  
On notera en particulier que  $L$  est la seule de ces matrices qui soit symétrique. [S]
3. Prouver que  $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), {}^tMLM = L\}$  est un groupe multiplicatif. [S]
4. Montrer que les matrices de  $M$  de  $\mathcal{G}$  sont caractérisées par la condition suivante :  
Pour tout  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , si  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , alors  $x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$ . [S]
5. Montrer que  $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  est un sous-groupe de  $\mathcal{G}$ . [S]
6. Vérifier que les six matrices  $A, B, C, J, K, L$  sont éléments de  $\mathcal{H}$ . [S]

### Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des matrices particulières de  $\mathcal{H}$ .

On note  $R_k = \begin{pmatrix} 1 - 2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ -2k^2 & -2k & 1 + 2k^2 \end{pmatrix}$ ,  $S_k = \begin{pmatrix} 1 - 2k^2 & 2k & 2k^2 \\ 2k & -1 & -2k \\ -2k^2 & 2k & 1 + 2k^2 \end{pmatrix}$ , et  $\begin{cases} \mathcal{R} = \{R_k, k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{S} = \{S_k, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

1. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , vérifier que les matrices  $R_k$  et  $S_k$  sont des éléments de  $\mathcal{H}$ . [S]
2. Montrer que  $\mathcal{R}$  est un sous-groupe commutatif de  $\mathcal{H}$ .  
Préciser  $R_k^m$  pour  $(k, m)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ . [S]
3. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , montrer que la matrice  $R_k - I$  est nilpotente. [S]
4. Déterminer trois suites  $(a_n), (b_n), (c_n)$  indépendantes de  $k$ , telle que, pour tout entier naturel  $n$  et tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on ait l'égalité :  $R_k^n = a_n R_k^2 + b_n R_k + c_n I$ . [S]
5. Montrer que  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{H}$ . [S]
6. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ . Soit  $\varphi_k$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $S_k$  dans la base canonique.  
Identifier l'application  $\varphi_k$  et préciser ses éléments caractéristiques. [S]

### Troisième partie

1. Soient  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et  $M$  dans  $\mathcal{H}$ , tels que  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .  
Montrer que  $(|x'|, |y'|, |z'|) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (|x|, |y|, |z|) \in \mathcal{T}$ . [S]
2. On se donne  $(x, y, z)$  dans  $\mathcal{T}$ , tel que  $z > 1$ , et on définit  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .
  - (a) Vérifier les inégalités  $x > 0$ ,  $y > 0$ , et  $0 < z' < z$ . [S]
  - (b) Montrer que l'un des triplets  $(x', y', z')$ ,  $(-x', y', z')$  ou  $(x', -y', z')$  est dans  $\mathcal{T}$ .  
Indication : caractériser les inégalités  $x' < 0$  et  $y' < 0$  en fonction de  $x$  et  $y$ . [S]
3. (a) Montrer qu'on peut, au moyen de produits par  $A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}$ , transformer en un nombre fini d'étapes un triplet rectangulaire  $(x_0, y_0, z_0)$  quelconque en  $(1, 0, 1)$ . [S]  
(b) Appliquer cette méthode au triplet  $(60, 91, 109)$ .  
En déduire explicitement une matrice  $Q$  de  $\mathcal{H}$  telle que  $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 91 \\ 109 \end{pmatrix}$ . [S]
4. (a) Soient  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  dans  $\mathcal{T}$ .  
Montrer qu'il existe au moins une matrice  $M$  de  $\mathcal{H}$  telle que  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ . [S]  
(b) Montrer que les  $M$  de  $\mathcal{H}$  telles que  $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont les matrices de  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ . [S]  
(c) En déduire toutes les matrices  $M$  de  $\mathcal{H}$  qui vérifient l'égalité  $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 91 \\ 109 \end{pmatrix}$ .  
(on n'ira pas jusqu'à expliciter ces matrices.) [S]

### Quatrième partie

1. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des suites réelles  $(a_n)$  telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} - 7a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n = 0$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ . [S]
  - (b) Donner une base de  $\mathcal{E}$  formée de suites géométriques. [S]
2. Donner l'expression du terme général des suites suivantes de  $\mathcal{E}$ .
  - (a) La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_1 = u_2 = 0$ . Calculer  $u_3$  et  $u_4$ . [S]
  - (b) La suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 0, v_1 = 1$  et  $v_2 = 0$ . [S]
  - (c) La suite  $(w_n)$  définie par  $w_0 = w_1 = 0$  et  $w_2 = 1$ . [S]
3. (a) Montrer que  $A^3$  est une combinaison linéaire de  $I, A, A^2$ . [S]  
(b) Montrer que pour  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $A^n = u_n I + v_n A + w_n A^2$ . [S]
4. Déterminer une application injective  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathcal{T}$ . [S]

## Corrigé du problème

### Première partie

1. On calcule l'inverse de  $A$  par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 12 & 6 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

On voit que  $B = AK$  avec  $K = K^{-1}$ . Ainsi  $B^{-1} = K^{-1}A^{-1} = KA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

De même  $C = AJ$  donc  $C^{-1} = J^{-1}A^{-1} = JA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ . [Q]

2. On cherche  $Q$  sous la forme  $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ .

La condition imposée s'écrit :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ a'x + b'y + c'z \\ a''x + b''y + c''z \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + b'y^2 + c''z^2 + (b + a')xy + (c + a'')xz + (c' + b'')yz \end{aligned}$$

L'égalité est vraie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  si et seulement si  $\begin{cases} a = 1, b' = 1, c'' = -1 \\ a' = -b, a'' = -c, b'' = -c' \end{cases}$

Les solutions sont donc les  $Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & -1 \end{pmatrix}$ , avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ .

En particulier, la seule matrice symétrique solution est la matrice  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . [Q]

3. Montrons que  $\mathcal{G}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ . Tout d'abord  $I$  est dans  $\mathcal{G}$ .

Si  $M$  est dans  $\mathcal{G}$ , l'égalité  ${}^T MLM = L$  implique  $(L {}^T ML)M = L^2 = I$ .

Toute matrice  $M$  de  $\mathcal{G}$  est donc inversible, avec  $M^{-1} = L {}^T ML$ . Ainsi  $\mathcal{G} \subset \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ .

Soient  $M$  et  $N$  deux éléments quelconques de  $\mathcal{G}$ .

On a  $L = {}^T N L N = {}^T N ({}^T M L M) N = ({}^T N {}^T M) L (M N) = {}^T (M N) L (M N)$ .

D'autre part  ${}^T MLM = L \Rightarrow LM = ({}^T M)^{-1} L \Rightarrow L = {}^T (M^{-1}) L M^{-1}$ .

Cela signifie que  $MN$  et  $M^{-1}$  sont dans  $\mathcal{G}$ .

Ainsi  $\mathcal{G}$  est non vide, inclus dans  $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  et stable pour le produit des matrices ainsi que pour le passage à l'inverse. L'ensemble  $\mathcal{G}$  est donc un sous-groupe de  $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ . [Q]

4. Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Pour tout  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , posons comme l'indique l'énoncé  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

On constate qu'on a :  $x'^2 + y'^2 - z'^2 = (x' \ y' \ z') L \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x \ y \ z)^T M L M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

La condition  $x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$  s'écrit donc  $(x \ y \ z)^T M L M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - z^2$ .

Mais la matrice  $Q = {}^T M L M$  est symétrique.

Comme on l'a vu dans la question (2), dire que la condition précédente est vraie pour tout  $x, y, z$  de  $\mathbb{R}$  équivaut donc à l'égalité  ${}^T M L M = L$ , c'est-à-dire à l'appartenance de  $M$  au groupe  $\mathcal{G}$ . On obtient ainsi la caractérisation demandée des éléments de  $\mathcal{G}$ . [Q]

5. La matrice identité est dans  $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ . Soient  $M, N$  deux éléments de  $\mathcal{H}$ .

D'une part  $MN$  est dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  et dans  $\mathcal{G}$  donc dans  $\mathcal{H}$ .

D'autre part  $M^{-1} = L {}^T M L$  est dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  et dans  $\mathcal{G}$  donc dans  $\mathcal{H}$ .

Ainsi  $\mathcal{H}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{G}$ . [Q]

6. On commence par vérifier que  $A$  (qui est symétrique) est dans  $\mathcal{H}$ .

$${}^T A L A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = L.$$

Les matrices  $J, K, L$  sont diagonales (donc commutent avec  $L$ ) et symétriques.

On en déduit  ${}^T J L J = J L J = J^2 L = L$ ,  ${}^T K L K = K L K = K^2 L = L$ , et  ${}^T L L L = L^3 = L$ .

Ainsi  $J, K, L$  sont dans  $\mathcal{H}$ . Donc  $B = AK$  et  $C = AJ$  sont dans  $\mathcal{H}$  (stabilité.) [Q]

## Deuxième partie

1. Soit  $k$  un entier relatif. Tout d'abord  $R_k$  et  $S_k$  sont bien dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ .

On constate ensuite que :

$$\begin{aligned} {}^T R_k L R_k &= \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & -2k^2 \\ -2k & 1 & -2k \\ 2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ 2k^2 & 2k & -1-2k^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-2k^2)^2 + 4k^2 - 4k^4 & 2(2k^2-1)k + 2k - 4k^3 & 2(1-2k^2)k^2 - 4k^2 + 2k^2(1+2k^2) \\ 2(2k^2-1)k + 2k - 4k^3 & 1 & -4k^3 - 2k + 2k(1+2k^2) \\ 2(1-2k^2)k^2 - 4k^2 + 2(1+2k^2)k^2 & -4k^3 - 2k + 2(1+2k^2)k & 4k^4 + 4k^2 - (1+2k^2)(1+2k^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve  ${}^T R_k L R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = L$ , donc  $R_k$  est dans  $\mathcal{H}$ .

Enfin, il est clair que  $S_k = R_k K$ . Il en découle que  $S_k$  est également dans  $\mathcal{H}$ . [Q]

2. Posons  $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Avec ces notations, on a  $R_k = I + 2kU + 2k^2V$ , pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ .

On constate que  $UV = VU = 0$ ,  $U^2 = V$ ,  $V^2 = 0$ .