

Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie II. Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

## PARTIE I

On considère dans cette partie une suite  $(p_n)$  de nombres réels positifs telle que la série  $\sum p_n$  converge. On définit pour  $0 \leq t \leq 1$  la fonction génératrice  $F$  de cette suite  $(p_n)$  par :

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j .$$

### 1) Etude de la fonction $F$ sur $[0,1]$

- a) Montrer que la série définissant  $F(t)$  est convergente pour  $0 \leq t \leq 1$ .
- b) Montrer que  $F$  est une fonction croissante sur  $[0,1]$ .  
En déduire que  $F$  admet une limite à droite en tout point de  $]0,1[$ , et une limite à gauche en tout point de  $]0,1[$  (on précisera le théorème utilisé).
- c) Soit  $t_0$  un nombre réel appartenant à  $]0,1[$ .
  - Etablir pour nombre réel  $t$  tel que  $t_0 \leq t \leq 1$  et tout nombre entier naturel  $n$  :
 
$$0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^n p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$
  - En déduire pour tout nombre entier naturel  $n$  :
 
$$0 \leq \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$
  - En déduire enfin la continuité à droite de  $F$  en  $t_0$ .
- d) Soit  $t_0$  un nombre réel appartenant à  $]0,1[$ .  
En admettant que l'on établit de façon analogue la continuité à gauche de  $F$  en  $t_0$ , en conclure que  $F$  est continue sur  $[0,1]$ .

### 2) Etude locale de la fonction $F$ en 0

- a) Pour tout nombre entier naturel  $n$ , établir que, pour tout nombre réel  $t$  de  $[0,1]$  :

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j .$$

- b) On considère la fonction  $\varepsilon_n$  définie sur  $]0, 1]$  par l'égalité suivante :

$$F(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n + t^n \varepsilon_n(t).$$

Déduire de l'inégalité précédente que  $\varepsilon_n$  est de limite nulle en 0.

Ainsi,  $F$  admet un développement limité à l'ordre de  $n$  en 0, qui permet d'obtenir  $p_0, \dots, p_n$ .

### 3) Etude locale de la fonction $F$ en 1.

- a) Etablir pour tout nombre réel  $t$  de  $[0, 1[$  :

$$\frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \dots + t^{j-1}).$$

En déduire que la fonction  $t \rightarrow [F(t) - F(1)] / (t - 1)$  est croissante sur  $[0, 1[$ .

- b) On suppose dans cette question la série  $\sum j p_j$  convergente.

Montrer que la fonction  $t \rightarrow [F(t) - F(1)] / (t - 1)$  est alors majorée sur  $[0, 1[$ , puis en déduire que la fonction  $F$  est dérivable en 1, et que :

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j.$$

- c) On suppose dans cette question la fonction  $F$  dérivable en 1.

Montrer que tout nombre réel  $t$  de  $[0, 1[$  et tout nombre entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\sum_{j=1}^n p_j (1 + t + \dots + t^{j-1}) \leq \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}.$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + n p_n \leq F'(1)$ , puis établir que la série  $\sum j p_j$  est convergente et comparer sa somme à  $F'(1)$ .

- d) Déduire de ces résultats que  $F$  est dérivable en 1 si, et seulement si, la série  $\sum j p_j$  est convergente, et que sa somme est alors égale à  $F'(1)$ .

- e) *Application* : pour tout entier naturel  $n$ , on suppose que  $p_n$  est la probabilité pour qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  prenne la valeur  $n$ .  
 A quelle condition nécessaire et suffisante sur la fonction  $F$  la variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance mathématique ? Comparer alors celle-ci à  $F'(1)$ .

#### 4) Produit de deux fonctions génératrices

Soient deux suites  $(p_n)$ ,  $(q_n)$  de nombres réels positifs telles que les séries  $\sum p_n$ ,  $\sum q_n$  convergent. On pose  $r_n = p_0 q_n + \dots + p_i q_{n-i} + \dots + p_n q_0$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .

a) Etablir pour tout entier naturel  $n$  la majoration suivante :

$$\sum_{j=0}^n r_j \leq \sum_{j=0}^n p_j \cdot \sum_{j=0}^n q_j .$$

En déduire la convergence de la série  $\sum r_n$ .

b) On pose alors pour tout nombre réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j , G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j , H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j .$$

Prouver que l'on a pour tout nombre réel  $t$  de  $[0, 1]$  et tout nombre entier naturel  $n$  :

$$\sum_{j=0}^n r_j t^j \leq \sum_{j=0}^n p_j t^j \cdot \sum_{j=0}^n q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j .$$

En déduire l'égalité  $F(t).G(t) = H(t)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

## PARTIE II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à  $p$  (où  $p$  désigne un nombre réel tel que  $0 < p < 1$ ).

On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de  $K$  francs (où  $K$  désigne un nombre entier naturel non nul) :

- il lance la pièce :
  - si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à  $K+1$  francs.
  - si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à  $K-1$  francs.

A l'issue de ceci, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement.

- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne alors par :

- $R_k$  l'événement "le joueur, muni d'un capital initial de  $K$  francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce".
- $p_n(K)$  la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital initial de  $K$  francs, soit ruiné à l'issue du  $n^{\text{ième}}$  jet de la pièce. Par convention, on pose  $p_0(K) = 0$ .

- $t \rightarrow F_K(t)$  la fonction génératrice de cette suite  $(p_n(K))$ , définie donc pour  $0 \leq t \leq 1$  par :

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K)t^n.$$

On vérifiera que la probabilité  $P(R_K)$  de l'événement  $R_K$  est égale à la somme de la série  $\sum p_n(K)$  (qui est donc convergente), et que  $P(R_K) = F_K(1)$ .

## II.1 Etude du cas particulier $K=1$

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial du joueur égal à 1 franc.

### 1) Etude de la probabilité de ruine du joueur

- a) Calculer  $p_1(1)$ ,  $p_2(1)$  et  $p_3(1)$ .
- b) Montrer, pour tout nombre entier  $n \geq 2$ , que la ruine du joueur intervient à l'issue du  $(n+1)^{\text{ième}}$  jet de la pièce si, et seulement si, il existe un entier  $j$  (où  $1 \leq j \leq n-1$ ) tel que :
- à l'issue de premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
  - à l'issue des  $j$  jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc.
  - à l'issue des  $n-j$  jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est donc alors ruiné.

Exprimer en fonction de  $p$  et des éléments de la suite  $(p_n(1))$  les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante (on rappelle que  $p_0(1) = 0$ ) :

$$p \sum_{j=0}^n p_j(1)p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n=0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

- c) En multipliant par  $t^{n+1}$  l'égalité précédente, puis en la sommant pour  $n \geq 0$ , établir à l'aide des résultats de I.4 la relation  $pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .
- d) Etudier les variations de la fonction  $t \rightarrow 1 - 4p(1-p)t^2$  sur l'intervalle  $]0, 1[$ , et montrer que  $1 - 4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2$  pour  $0 < t < 1$ .
- En déduire que, pour  $0 < t < 1$ , l'équation du second degré  $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$  possède deux racines réelles distinctes  $x'(t)$  et  $x''(t)$  (on supposera  $x'(t) < x''(t)$ ). Pour tout nombre réel  $t$  appartenant à  $]0, 1[$ , montrer que  $x''(t) > 1$ , puis, en remarquant que  $F_1(t) \leq 1$ , en déduire  $F_1(t)$  en fonction de  $p$  et  $t$  pour  $0 < t < 1$ .

e) En faisant tendre  $t$  vers 1, déterminer alors  $F_1(1)$  et en déduire la probabilité  $P(R_1)$  de la ruine du joueur en distinguant les deux cas  $p \leq 1/2$  et  $p > 1/2$ .

### 2) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur $p \leq 1/2$

Pour  $p < 1/2$ , déterminer à l'aide de la fonction génératrice  $F_1$  et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire  $X_1$  indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque  $p=1/2$  ?

### 3) Expression des probabilités $p_n(1)$

a) Rappeler le développement limité de la fonction  $x \rightarrow (1+x)^{1/2}$  en 0, puis en déduire le développement limité à l'ordre  $2m+1$  de la fonction  $F_1$  en 0.

b) Déduire de I.2 que l'on a pour tout nombre entier naturel  $n$   $p_{2n}(1) = 0$  et :

$$p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p(1-p)^{n+1}.$$

## II.2 Etude du cas général

### 1) Etude de la probabilité de ruine du joueur

a) Le premier jet de la pièce donne Face ou Pile, événements notés ici  $F_1$  ou  $P_1$ .

A l'aide du système complet d'événements  $\{F_1, P_1\}$ , établir la relation suivante pour  $n \geq 2$ .

$$p_n(1) = pp_{n-1}(2).$$

En multipliant par  $t^n$  l'égalité précédente, puis en la sommant pour  $n \geq 2$ , établir la relation  $F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t$  pour  $0 \leq t \leq 1$ , puis en déduire que  $F_2(t) = [F_1(t)]^2$ .

b) On suppose ici  $K \geq 2$ . En raisonnant de même, établir la formule suivante :

$$P_n(K) = P \cdot P_{n-1}(K+1) + (1-p)P_{n-1}(K-1)$$

En déduire l'expression de  $F_K(t)$  en fonction de  $p$ ,  $t$ ,  $F_{K+1}$  et  $F_{K-1}(t)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

En étudiant alors la suite  $K \rightarrow U_K = F_K(t)$ , exprimer  $F_K(t)$  en fonction de  $p$ ,  $K$  et  $t$ .

c) Déterminer  $F_K(1)$  et en déduire la probabilité  $P(R_K)$  de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas  $p \leq 1/2$  et  $p > 1/2$ .

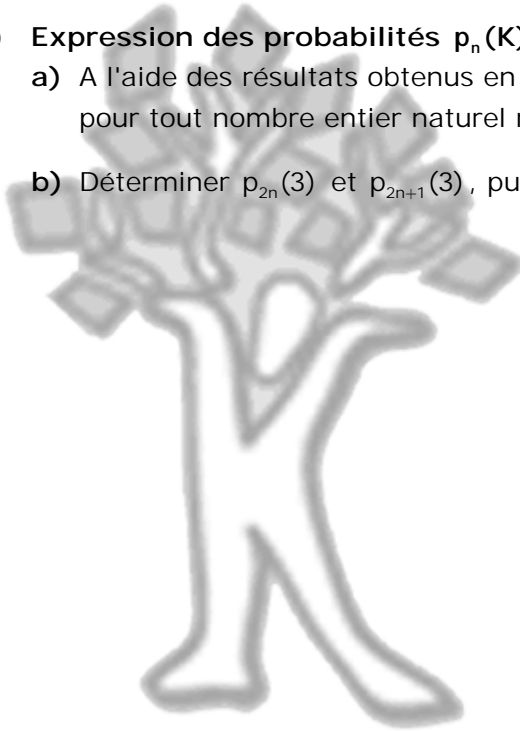
**2) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour  $p \leq 1/2$** 

Pour  $p < 1/2$ , déterminer à l'aide de la fonction génératrice  $F_K$  et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire  $X_K$  indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque  $p=1/2$  ?

**3) Expression des probabilités  $p_n(K)$** 

a) A l'aide des résultats obtenus en II.2.1.a), établir que  $p_{2n+1}(2) = 0$  puis préciser  $p_{2n}(2)$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .

b) Déterminer  $p_{2n}(3)$  et  $p_{2n+1}(3)$ , puis, plus généralement,  $p_{2n}(K)$  et  $p_{2n+1}(K)$  pour  $K \geq 1$ .



## Correction

### Partie I.

1) a) La suite  $(p_j)_j$  étant à termes positifs, on peut écrire :

$$\forall t \in [0,1], \forall j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq p_j t^j \leq p_j$$

Comme par hypothèse, la série  $\sum p_j$  converge, il en découle, par comparaison de séries à termes positifs, que la série  $\sum p_j t^j$  converge et donc :

La série définissant  $F(t)$  est convergente pour  $0 \leq t \leq 1$

b) • Soit  $(x,y) \in [0,1]^2$ ,  $x < y$ . La fonction  $t \mapsto t^j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) étant croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a alors :

$$\forall j \in \mathbb{N}, x^j \leq y^j \quad \text{donc, en multipliant par } p_j \geq 0 :$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, p_j x^j \leq p_j y^j \quad \text{d'où, par sommation finie :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^n p_j x^j \leq \sum_{j=0}^n p_j y^j.$$

Les suites  $\left(\sum_{j=0}^n p_j x^j\right)_n$  et  $\left(\sum_{j=0}^n p_j y^j\right)_n$  étant convergentes (cf. question 1a), on obtient alors, par prolongement des inégalités (on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ ) :

$$F(x) \leq F(y) \quad \text{d'où}$$

$F$  est croissante sur  $[0,1]$ .

•  $F$  étant monotone sur  $[0,1]$ , on peut alors conclure, d'après le théorème de la limite monotone :

$F$  admet une limite à droite en tout point de  $[0,1[$  et une limite à gauche en tout point de  $]0,1]$ .

NB :  $F$  étant bornée sur  $[0,1]$  (par  $F(0)=p_0$  et  $F(1)$ ) ces limites sont finies.

c) •  $F$  étant croissante sur  $[0,1]$ , on a, comme  $0 \leq t_0 < t \leq 1$  :

$$F(t) - F(t_0) \geq 0.$$

De plus, on a :

$$F(t) - F(t_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(t^j - t_0^j) \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(t) - F(t_0) = \sum_{j=0}^n p_j(t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(t^j - t_0^j).$$

Or, comme :  $\forall j \geq n+1, p_j(t^j - t_0^j) \leq p_j$ , on peut écrire, par sommation finie puis par prolongement des inégalités (cf. question 1b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(t^j - t_0^j) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^n p_j(t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

• Comme  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \left( \sum_{j=0}^n p_j(t^j - t_0^j) \right) = 0$  (par continuité des fonctions polynômes en  $t_0$ ), la somme étant finie), on peut alors conclure, d'après le théorème de prolongement des inégalités (on fait tendre  $t$  vers  $t_0$ ),  $F$  admettant une limite finie en  $t_0$  à droite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lim_{t \rightarrow t_0^+} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

• On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j - \sum_{j=0}^n p_j.$$

Or, comme la série  $\sum p_j$  converge, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n p_j = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \quad \text{d'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j = 0 \quad \text{et donc, par prolongement des inégalités :}$$

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow t_0^+} F(t) - F(t_0) \leq 0 \quad \text{donc :}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} F(t) = F(t_0) \quad \text{soit finalement :}$$

$F$  est continue à droite en  $t_0$



d) F étant continue à droite en tout point de  $[0,1[$  et à gauche en tout point de  $]0,1]$ , on peut conclure :

F est continue sur  $[0,1]$ .

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall j \geq n+1, \quad 0 \leq t^j \leq t^{n+1} \quad \text{donc, comme } \forall j \in \mathbb{N}, p_j \geq 0 :$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall j \geq n+1, \quad 0 \leq t^j p_j \leq t^{n+1} p_j.$$

Par sommation finie, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall N \geq n+1, 0 \leq \sum_{j=n+1}^N p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^N p_j.$$

Les suites en présence étant convergentes, on peut finalement conclure, par prolongement des inégalités (on fait tendre N vers  $+\infty$ ) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], 0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$

b) Par définition de  $\varepsilon_n (n \in \mathbb{N})$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in ]0,1], \quad \varepsilon_n(t) &= \frac{F(t) - \sum_{j=0}^n p_j t^j}{t^n} \quad \text{i.e. :} \\ &= \frac{1}{t^n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j. \end{aligned}$$

Comme :  $\forall t \in ]0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{t^n} \geq 0$ , on a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in ]0,1], 0 \leq \varepsilon_n(t) \leq t$ .

D'après le théorème de l'encadrement, on peut finalement conclure :

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_n(t) = 0$

3) a) • On a :

$$\forall t \in [0,1[, \quad F(t) - F(1) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j (t^j - 1).$$

Or, d'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $t \neq 1$ , on a :

$$\forall t \in [0, 1[, \forall j \in \mathbb{N}^*, k^j - 1 = (t - 1) \sum_{k=0}^{j-1} t^k$$

Le terme de la somme égale à  $F(t) - F(1)$  en  $j=0$  étant nul, on peut finalement conclure :

$$\forall t \in [0, 1[, \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \dots + t^{j-1})$$

• En raisonnant comme à la question 1a, on montre :

$$\forall (x, y) \in [0, 1[, x < y \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + x + \dots + x^{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + y + \dots + y^{j-1}) \quad \text{d'où :}$$

$$\forall (x, y) \in [0, 1[, x < y \Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leq \frac{F(y) - F(1)}{y - 1}.$$

Ainsi,

$$t \mapsto \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} \text{ est croissante sur } [0, 1[.$$

**b) • On a :**

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \quad 1 + t + \dots + t^{j-1} \leq j \quad \text{d'où, la suite } (p_j)_j \text{ étant positive :}$$

$$\forall t \in [0, 1[, \forall j \in \mathbb{N}^*, p_j (1 + t + \dots + t^{j-1}) \leq j p_j.$$

Par sommation finie et par prolongement des inégalités, il en découle :

$$\forall t \in [0, 1[, \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \dots + t^{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j.$$

D'après le résultat du 3a, on en conclut :

$$\forall t \in [0, 1[, \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j$$

- La fonction  $t \mapsto \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}$  étant croissante et majorée sur  $[0,1[$ , elle admet une limite finie à gauche en 1, donc  $F$  est dérivable en 1 et, en prolongeant l'inégalité précédente (on fait tendre  $t$  vers 1) :

F est dérivable en 1 (à gauche), avec :

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j.$$

- c) • On a :

$$\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) - \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$$

soit, finalement, comme  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \geq 0$  :

$$\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \leq \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}$$

- La somme majorée étant finie, on peut donc écrire, par prolongement des inégalités (on fait tendre  $t$  vers 1 et l'on utilise la continuité des fonctions polynômes en 1 et la dérivabilité de  $F$  en 1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n jp_j \leq F'(1)$$

- La suite  $\left( \sum_{j=1}^n jp_j \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant croissante (car  $\forall n \in \mathbb{N}^*, np_n \geq 0$ ) et majorée (par  $F'(1)$ ) elle converge et, par prolongement des inégalités, sa limite est majorée par  $F'(1)$ , ce qui nous permet de conclure :

$$\text{La somme } \sum jp_j \text{ converge et } \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \leq F'(1)$$

- d) D'après les résultats des questions 3b et 3c, on peut écrire que  $F$  est dérivable en 1, si et seulement si, la série  $\sum jp_j$  converge et, sous l'une de ces hypothèses :

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \leq F'(1).$$

Ainsi,

La série  $\sum jp_j$  converge si, et seulement si,  $F$  est dérivable en 1,

$$\text{avec, dans ce cas : } F'(1) = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$$