On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à l'élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/2.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
- Lorsque l'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A)

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les évènements suivants :

ABC_n : « à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
AB_n : « à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés ».
On définit de façon analogue les évènements BC_n et CA_n.
A_n : « à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
On définit de façon analogue les évènements B_n et C_n.
$\varnothing_n$: « à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin, ABC_0 est l'événement certain, AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, $\varnothing_0$ l'événement impossible.

* * *

Partie I

On établit dans cette partie I quelques résultats probabilistes préliminaires.

1) Calcul de probabilités.

a) Exprimer, si U et V désignent deux évènements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.

b) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

2) Détermination de probabilités conditionnelles.

a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel *n*.
Dans la suite, on ne considérera donc que les évènements ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n et $\varnothing_n$.

b) Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} / ABC_n)$.

Mathématiques

c) Expliciter $p(BC_{n+1} / ABC_n)$ à l'aide de la question 1°, puis donner $p(CA_{n+1} / ABC_n)$.

d) Expliciter $p(A_{n+1} / ABC_n)$, $p(B_{n+1} / ABC_n)$ et $p(C_{n+1} / ABC_n)$.

e) Expliciter $p(A_{n+1} / CA_n)$, $p(B_{n+1} / BC_n)$, $p(C_{n+1} / CA_n)$ et $p(C_{n+1} / BC_n)$.

f) Expliciter $p(\varnothing_{n+1} / ABC_n)$, $p(\varnothing_{n+1} / BC_n)$ et $p(\varnothing_{n+1} / CA_n)$.

3) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat.

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au-delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

a) Quelle est la probabilité de l'événement $T=1$?

b) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n .$$

c) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des évènements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$: $ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \ldots \cap CA_n$
(pour $k=0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \ldots \cap CA_n$)

d) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des évènements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$: $ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \ldots \cap BC_n$
(pour $k=0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n$).

e) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la nième épreuve, et en déduire la probabilité $p(T=n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n=1$ le résultat obtenu à la question a).

f) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T=n)$ (avec $n \geq 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

Partie II

Dans cette partie, on détermine les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1) Expression de la matrice de transition M

a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $p(ABC_n)$, $p(BC_n)$, $p(CA_n)$, $p(A_n)$, $p(B_n)$, $p(C_n)$, $p(\varnothing_n)$.
Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n .$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1.

b) En déduire E_n en fonction de n, de M et E_0.

2) Calcul des puissances de la matrice M.

a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V'' et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{bmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{bmatrix}, \ M'' = \begin{bmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4. Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{bmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

b) Expliciter les matrices *U* et *V* telles que :

$$M = \begin{bmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{bmatrix}$$

c) Etablir enfin par récurrence sur $n \geq 1$ l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \ldots + VU^{n-1} & I_4 \end{bmatrix}.$$

3) Diagonalisation de la matrice U

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :

- la *première* composante de V_1 vaut 1
- la *troisième* composante de V_2 vaut 1
- la *deuxième* composante de V_3 vaut 1.

b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre V_1, V_2, V_3. Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1}$.

b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X.

On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles $(U^n), (I_3 + U + U^2 + \ldots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \ldots + VU^{n-1})$.

c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n).

d) Vérifier que les suites $\left(\left(p(ABC_n)\right), \left(p(BC_n)\right)\right.$ et $\left(p(CA_n)\right)$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(A_n)), (p(B_n)), (p(C_n)), (p(\varnothing_n))$.

Comparer les probabilités respectives pour que A, B, C remportent le combat.

Correction

PARTIE I

1) a) D'après le cours, on peut écrire :

$$\boxed{p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V)}$$

b) Considérons une épreuve à laquelle participent A, B et C et notons X, Y et Z les événements définis respectivement par "A rate son tir", "B réussit son tir" et "C réussit son tir. On a :

$p(X \cap (Y \cup Z) = p((X \cap Y) \cup (X \cap Z))$ donc, d'après le résultat de la question précédente, avec $U = (X \cap Y)$ et $V = (X \cap Z)$:

$= p(X \cap Y) + p(X \cap Z) - p((X \cap Y) \cap (X \cap Z))$ i.e. :

$= p(X \cap Y) + p(X \cap Z) - p(X \cap Y \cap Z)$.

Or, les tirs des trois joueurs étant mutuellement indépendants, X, Y et Z le sont également, et l'on peut donc écrire :

$p(X \cap (Y \cup Z)) = p(X)p(Y) + p(X)p(Z) - p(X)p(Y)p(Z)$ d'où par hypothèse :

$= \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ soit finalement :

La probabilité pour que, lors d'une épreuve à laquelle participent A, B et C, (A rate son tir) et (B ou réussissent leur tir) est égale à $\frac{2}{9}$

c) On a :

$p(Y \cup Z) = p((X \cup \overline{X}) \cap (Y \cup Z))$ soit encore :

$= p((X \cap (Y \cup Z)) \cup (\overline{X} \cap (Y \cup Z)))$ donc, ces événements étant incompatibles (A ne peut à la fois réussir et rater son tir):

$= p(X \cap (Y \cup Z)) + p(\overline{X} \cap (Y \cup Z))$ soit encore :

$p(\overline{X}\cap(Y\cup Z)) = p(Y\cup Z) - p(X\cap(Y\cup Z))$ d'où, d'après le résultat des questions I.1.a et I.1.b :

$= p(Y)+p(Z)-p(Y\cap Z)-\frac{2}{9}$ dont, Y et Z étant indépendants :

$= p(Y)+p(Z)-p(Y)p(Z)-\frac{2}{9}$ d'où, par hypothèse :

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{2}{9}$ soit finalement :

La probabilité pour que, lors d'une épreuve à laquelle participent A, B et C, (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir) est égale à $\frac{4}{9}$

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour que l'événement AB_n soit réalisé, il faut que, à l'une des épreuves précédentes numérotée i $(1\le i\le n)$, C ait été éliminé. Or, pour que C soit éliminé à l'issue de l'épreuve i et que l'événement AB_n puisse être réalisé, il faut que les trois joueurs participent à l'épreuve i. De plus, par hypothèse, si les trois joueurs participent àl'épreuve i, C n'est pas visé et ne peut donc être éliminé (A visant B tandis que B et C visent A). Ainsi, l'événement AB_n est impossible.

Le cas n=0 rejoignant le cas général (par hypothèse, l'événement AB_0 est impossible), on peut désormais conclure :

Pour tout entier naturel n, l'événement AB_n est impossible

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement ABC_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, aucun des participants ne soit éliminé, donc que tous les participants ratent leur tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(ABC_{n+1}/ABC_n\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$ et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ p\left(ABC_{n+1}/ABC_n\right)=\frac{1}{9}}$$

c) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement BC_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul A soit éliminé, donc que A (visant B) rate son tir et que l'un des joueurs B ou C (visant tous deux A) réussisse son tir. D'après le résultat de la question I.1.b, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p\left(BC_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{2}{9}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement CA_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul B soit éliminé, donc que A (visant B) réussisse son tir et que B et C (visant tous deux A) ratent leur tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(CA_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p\left(CA_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{2}{9}}$$

d) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. De même qu'à la question I.2.a, sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), C ne peut être éliminé à la $(n+1)^{ème}$ épreuve, donc les événements A_{n+1} et B_{n+1} ne peuvent être réalisés.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p\left(A_{n+1}/ABC_n\right) = p\left(B_{n+1}/ABC_n\right) = 0}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'es-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul C ne soit pas éliminé, donc que A (visant B) réussisse son tir et que l'un des joueurs B ou C (visant tous deux A) réussisse son tir. D'après le résultat de la question I.1.c, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p\left(C_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{4}{9}}$$

e) ■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'es-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement A_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul C soit éliminé, donc que A (visant C) réussisse son tir et que C (visant A) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(A_{n+1}/CA_n\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(A_{n+1}/CA_n\right) = \frac{4}{9}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement B_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul C soit éliminé, donc que B (visant C) réussisse son tir et que C (visant B) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(B_{n+1}/BC_n\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(B_{n+1}/BC_n\right) = \frac{1}{3}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul A soit éliminé, donc que A (visant C) rate son tir et que C (visant A) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(C_{n+1}/CA_n\right) = \left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}$$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(C_{n+1}/CA_n\right) = \frac{1}{9}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, que seul B soit éliminé, donc que B (visant C) rate son tir et que C (visant B) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(C_{n+1}/BC_n\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}$$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(C_{n+1}/BC_n\right) = \frac{1}{6}}$$

f) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. De même qu'à la question I.2.a, sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), C ne peut être éliminé à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, donc l'événement $\varnothing_{n+1}$ ne peut être réalisé. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p\left(\varnothing_{n+1}/ABC_n\right) = 0}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement $\varnothing_{n+1}$ soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, que B et C soient éliminés, donc que B (visant C) réussisse son tir et que C (visant B) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(\varnothing_{n+1}/BC_n\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(\varnothing_{n+1}/BC_n\right) = \frac{1}{6}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement $\varnothing_{n+1}$ soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, A et C soient éliminés, donc que A (visant C) réussisse son tir et que C (visant A) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(\varnothing_{n+1}/CA_n\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(\varnothing_{n+1}/CA_n\right) = \frac{2}{9}}$$

3) a) L'événement ABC_0 étant certain, on peut écrire :

$$p(T = 1) = p\left(T = 1/ABC_0\right).$$

Or on a vu que, à l'issue de la première épreuve, C n'est pas éliminé. Sachant que l'événement ABC_0 est réalisé, pour que l'événement $[T=1]$ soit réalisé, il faut et il suffit donc que l'événement C_1 soit réalisé. On a donc :

$p(T=1)=p\left(C_1/ABC_0\right)$ d'où, d'après le résultat de la question I.2.d (pour n=0) :

$$\boxed{p(T=1)=\frac{4}{9}}$$

b) En notant $p_{1,n}$ la probabilité recherchée, on peut écrire :

$p_{1,n}=p\left(\bigcap_{i=1}^{n} ABC_i\right)$ donc, d'après la formule des probabilités composées, comme : $p\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} ABC_i\right)\neq 0$:

$$=p(ABC_1)\prod_{i=2}^{n} p\left(ABC_i\Big/\bigcap_{j=1}^{i-1} ABC_j\right).$$

Or, pour $j\in\mathbb{N}^*$, l'événement ABC_j est inclus dans l'événement ABC_{j-1} (si aucun joueur n'est éliminé à l'issue de la j^{ème} épreuve, aucun ne l'était à l'issue de la (j-1)^{ème}) donc la suite d'événements $(ABC_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, et l'on a donc :

$p_{1,n}=p(ABC_1)\prod_{i=2}^{n} p\left(ABC_i/ABC_{i-1}\right)$ et donc, d'après le résultat de la question I.2b et comme : $p(ABC_1)=p\left(ABC_1/ABC_0\right)=\frac{1}{9}$:

$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{9}$ soit finalement, le produit comportant n termes égaux :

$$\boxed{\text{L'événement } ABC_1\cap ABC_2\ldots\cap ABC_n \text{ a une probabilité égale à } \frac{1}{9^n}}$$

c) Les événements $ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\ldots\cap CA_n (1\leq k\leq n-1)$ et $CA_1\cap CA_2\cap\ldots\cap CA_n$ étant incompatibles deux à deux (B ne pouvant être éliminé à l'issue de deux épreuves distinctes), on peut écrire, en notant $p_{2,n}$ la probabilité recherchée :

$$p_{2,n}=\sum_{k=1}^{n-1} p(ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\ldots\cap CA_n)+p(CA_1\cap CA_2\cap\ldots\cap CA_n).$$

❒ De plus, comme $p\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)\cap\left(\bigcap_{j=k+1}^{n-1} CA_j\right)\right)\neq$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées (si $n\geq 3$) :

$$\forall k\in[\![1,n-2]\!],\ p(ABC_1\cap\ldots\cap ABC_K\cap CA_{K+1}\ldots\cap CA_n)=p\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)p\left(CA_{k+1}\Big/\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)\times$$
$$\prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i\Big/\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)\cap\left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right)$$

soit encore, par définition de $p_{1,k}$ (valable aussi si $k=1$) :

$$=p_{1,k}\,p\left(CA_{k+1}\Big/\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)\times$$
$$\prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i\Big/\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)\cap\left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right)$$

Or, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, le nom des joueurs (A, B ou C) n'étant pas éliminés à l'issue de la $i^{ème}$ épreuve ne dépend que du nom des joueurs n'ayant pas été éliminés à l'issue de la $(i\text{-}1)^{ème}$ épreuve, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall k\in[\![1,n-2]\!],\ \forall i\in[\![k+2,n]\!],\ p\left(CA_i\Big/\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)\cap\left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right)=p\left(CA_i/CA_{i-1}\right)\quad\text{et :}$$

$$p\left(CA_{k+1}\Big/\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right)=p\left(CA_{k+1}/ABC_k\right)\qquad\text{donc :}$$

$$\forall k\in[\![1,n-2]\!],\ p\left(ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\ldots\cap CA_n\right)=p_{1,k}\,p\left(CA_{k+1}/ABC_k\right)\prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i/CA_{i-1}\right)\quad\text{et}$$

donc, d'après les résultats des questions I.3b et I.2c :

$$=\frac{1}{9^k}\times\frac{2}{9}\prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i/CA_{i-1}\right).$$

❒ Soit alors i un entier naturel supérieur ou égal à 3. Sachant que l'événement CA_{i-1} est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $(i\text{-}1)^{ème}$ épreuve, donc participent à la $i^{ème}$ épreuve), pour que l'événement CA_i soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $i^{ème}$ épreuve, A et C ne soient pas éliminés, donc que A (visant C) rate son tir et que C (visant A) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(CA_i/CA_{i-1}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\qquad\text{d'où :}$$
$$=\frac{2}{9}\text{①}.$$

On a donc :

$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \ldots \cap CA_n) = \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^{n} \frac{2}{9}$ d'où, le produit comportant n-k-1 termes égaux :

$$= \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}.$$

Le cas k=n-1 rejoignant le cas général (après vérification), on a donc :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \ldots \cap CA_n) = \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}.$$

❒ Enfin, comme $p\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} CA_j\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées :

$p(CA_1 \cap CA_2 \cap \ldots \cap CA_n) = p(CA_1) \prod_{i=2}^{n} p\left(CA_i \Big/ \bigcap_{j=1}^{i-1} CA_j\right)$ donc, de même que précédemment et comme : $p(CA_1) = p\left(CA_1 / ABC_0\right)$:

$= p\left(CA_1/ABC_0\right) \prod_{i=2}^{n} p\left(CA_i/CA_{i-1}\right)$ d'où, d'après ① le résultat de la question I.2c ;

$= \left(\frac{2}{9}\right)^n$ soit encore :

$$\frac{1}{9^0} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-0}.$$

❒ On peut finalement écrire :

$p_{2,n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k} + \frac{1}{9^0} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-0}$ soit encore :

$= \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc, en reconnaissant la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$ et de premier terme 1 :

$= \left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ soit finalement :

$$\boxed{\text{La réunion pour } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ des évènements } ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \ldots \cap CA_n \text{ a une probabilité égale à } 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)}$$

d) Les évènements $ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n (1 \leq k \leq n-1)$ et $BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n$ étant incompatibles deux à deux (A ne pouvant être éliminé à l'issue des deux épreuves distinctes), on peut écrire, en notant $p_{3,n}$ la probabilité recherchée :

$$p_{3,n} = \sum_{k=1}^{n-1} p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) + p(BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n).$$

❑ De plus, comme $p\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées (si $n \geq 3$) :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = p\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) p\left(BC_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \text{x}$$

$$\prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right)$$

soit encore :

$$= p_{1,k} p\left(BC_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \text{x}$$

$$\prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right).$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le nom des joueurs (A, B ou C) n'étant pas éliminés à l'issue de la $i^{\text{ème}}$ épreuve ne dépend que du nom des joueurs n'ayant pas été éliminés à l'issue de la $(i\text{-}1)^{\text{ème}}$ épreuve, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], \forall i \in [\![k+2, n]\!], p\left(BC_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right) = p\left(BC_i / BC_{i-1}\right) \quad \text{et :}$$

$$p\left(BC_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) = p\left(BC_{k+1} / ABC_k\right) \quad \text{donc :}$$

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = p_{1,k} p\left(BC_{k+1} / ABC_k\right) \prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i \big/ BC_{i-1}\right)$$

et donc d'après les résultats des questions I.3b et I.2c :

$$= \frac{1}{9^k} \text{x} \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i / BC_{i-1}\right)$$

❑ Soit alors i un entier naturel supérieur ou égal à 3. Sachant que l'événement BC_{i-1} est réalisé (c'est à dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la (i-1)$^{\text{ème}}$ épreuve, donc participent à la i$^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement BC_i soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la i$^{\text{ème}}$ épreuve, B et C ne soient pas éliminés, donc que B (visant C) rate son tir et que C (visant B) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(BC_i / BC_{i-1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$ d'où :

$$= \frac{1}{3} \quad ②$$

On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^{n} \frac{1}{3}$$ d'où le produit comportant n-k-1 termes égaux et comme $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$:

$$= \frac{2}{9^k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}.$$

Le cas k=n-1 rejoignant le cas général, on a donc :

$$\forall k [\![1, n-1]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = \frac{2}{9^k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}.$$

❑ Enfin, comme $p\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} BC_j\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées :

$$p(BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n) = p(BC_1)\prod_{i=2}^{n} p\left(BC_i \Big/ \bigcap_{j=1}^{i-1} BC_j\right)$$ donc, de même que précédemment et comme : $p(BC_1) = p\left(BC_1 / ABC_0\right)$:

$$= p\left(BC_1/ABC_0\right)\prod_{i=2}^{n} p\left(BC_i/BC_{i-1}\right)$$ d'où, d'après ② et le résultat de la question I.2c :

$$= \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$ soit encore :