

## Plus loin dans l'irrationnel

Il n'est pas très difficile de montrer que  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  est irrationnel.

On se propose ici de généraliser considérablement ce genre de résultat.

Pour cela, il est important de se munir de notations commodes.

- On note  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers.
- Pour toute partie finie  $A$  de  $\mathbb{P}$ , on note  $\Pi_A$  la racine carrée du produit des éléments  $p$  de  $A$ .  
Par exemple, si  $A = \{2, 5, 17\}$ , alors  $\Pi_A = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 17} = \sqrt{170}$ . Par convention  $\Pi_\emptyset = 1$ .  
Il est clair que si  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes de  $\mathbb{P}$ , alors  $\Pi_A \Pi_B = \Pi_{A \cup B}$ .
- Pour toute partie  $E$  de  $\mathbb{P}$ , le symbole  $\sum_A^E$  désigne une somme indicée sur une partie quelconque  $A$  de  $E$ .  
Par exemple, si  $E = \{2, 5, 17\}$ ,  $S = \sum_A^E \lambda_A \Pi_A$  est une somme de  $2^3$  termes,  $A$  parcourant  $\mathcal{P}(E)$ .  
Cette somme pourrait s'écrire, en notant par exemple  $\lambda_{a,b,\dots}$  plutôt que  $\lambda_{\{a,b,\dots\}}$  :

$$\begin{aligned}
 S &= \lambda_\emptyset \Pi_\emptyset + \lambda_2 \Pi_2 + \lambda_5 \Pi_5 + \lambda_{17} \Pi_{17} + \lambda_{2,5} \Pi_{2,5} + \lambda_{2,17} \Pi_{2,17} + \lambda_{5,17} \Pi_{5,17} + \lambda_{2,5,17} \Pi_{2,5,17} \\
 &= \lambda_\emptyset + \lambda_2 \sqrt{2} + \lambda_5 \sqrt{5} + \lambda_{17} \sqrt{17} + \lambda_{2,5} \sqrt{10} + \lambda_{2,17} \sqrt{34} + \lambda_{5,17} \sqrt{85} + \lambda_{2,5,17} \sqrt{170}
 \end{aligned}$$

Bien sûr, rien n'empêche d'écrire  $S = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{17} + e\sqrt{10} + f\sqrt{34} + g\sqrt{85} + h\sqrt{170}$

- Pour toute partie  $E$  de  $\mathbb{P}$ , on note  $\mathbb{K}_E = \{\sum_A^E \lambda_A \Pi_A, \lambda_A \in \mathbb{Q}\}$ .  
 $\mathbb{K}_E$  est donc l'ensemble des combinaisons à coefficients rationnels des  $\Pi_A$ , pour tous les  $A \subset E$ .  
Cette définition donne immédiatement  $\mathbb{K}_\emptyset = \mathbb{Q}$ . Voici quelques exemples :
  - ◇  $\mathbb{K}_{\{2\}} = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$
  - ◇  $\mathbb{K}_{\{2,5\}} = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10}, (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4\}$
  - ◇  $\mathbb{K}_{\{2,5,17\}} = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{17} + e\sqrt{10} + f\sqrt{34} + g\sqrt{85} + h\sqrt{170}, (a, b, \dots, g, h) \in \mathbb{Q}^8\}$
- Il est clair que si  $E \subset F \subset \mathbb{P}$ , alors  $\mathbb{K}_E \subset \mathbb{K}_F$ . On verra plus loin que  $E \subsetneq F \Rightarrow \mathbb{K}_E \subsetneq \mathbb{K}_F$ .
- Juste une petite remarque, en prenant par exemple  $E = \{2, 5, 17\}$  :  
Soit  $S = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{17} + e\sqrt{10} + f\sqrt{34} + g\sqrt{85} + h\sqrt{170}$  dans  $\mathbb{K}_E$ , avec  $(a, b, \dots, g, h)$  dans  $\mathbb{Q}^8$ .  
Alors on peut écrire :  $S = x + y\sqrt{17}$ , avec  $\begin{cases} x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + e\sqrt{10} \\ y = d + f\sqrt{2} + g\sqrt{5} + h\sqrt{10} \end{cases}$  donc  $(x, y) \in \mathbb{K}_{\{2,5\}}^2$ .

Dans tous le problème,  $E$  désigne une partie de  $\mathbb{P}$ .

1. On suppose que  $E$  est non vide. Montrer que  $\Pi_E$  est un irrationnel. [S]
2. Prouver que  $\mathbb{K}_E$  est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ . [S]
3. On va montrer, par récurrence sur  $n = \text{card}(E)$ , que  $\mathbb{K}_E$  est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

La propriété est vraie si  $n = 0$ , car alors  $E = \emptyset$  et on sait que  $\mathbb{K}_\emptyset = \mathbb{Q}$ .

On se donne donc un entier  $n \geq 1$ , et on suppose que la propriété est vraie au rang  $n - 1$ .

On suppose que  $\text{card}(E) = n$ . On note  $q$  un élément de  $E$ , et  $G = E \setminus \{q\}$ .

On se donne un élément  $z$  non nul de  $\mathbb{K}_E$ . Il s'agit de montrer que  $1/z$  est dans  $\mathbb{K}_E$ .

Bien sûr, si  $z$  est dans  $\mathbb{K}_G$ , l'hypothèse de récurrence montre que  $1/z$  est dans  $\mathbb{K}_G$  donc dans  $\mathbb{K}_E$ .

On suppose donc que  $z$  est dans  $\mathbb{K}_E$  mais pas dans  $\mathbb{K}_G$ .

- (a) Montrer qu'il existe  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{K}_G$  tels que  $z = x + y\sqrt{q}$ , avec  $x - y\sqrt{q} \neq 0$ . [S]

- (b) On note  $\bar{z} = x - y\sqrt{q}$  et  $\omega = z\bar{z} = x^2 - qy^2$ . Montrer que  $\omega$  est un élément non nul de  $\mathbb{K}_G$ .  
En déduire que  $1/z$  est dans  $\mathbb{K}_E$  et conclure. [S]
4. On note  $\mathbb{R}_Q$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de sa structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ .
- (a) Montrer que  $\mathbb{K}_E$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathbb{R}_Q$ .  
Préciser un majorant de la dimension de  $\mathbb{K}_E$ , en fonction de  $n = \text{card}(E)$ . [S]
- (b) Dans cette question, on va redémontrer que  $\mathbb{K}_E$  est un corps.  
Soit  $x$  un élément non nul de  $\mathbb{K}_E$ . Pour tout  $y$  de  $\mathbb{K}_E$ , on pose  $\varphi(y) = xy$ .  
Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}_E$ .  
En déduire que l'inverse dans  $\mathbb{R}$  du réel  $x$  est encore un élément de  $\mathbb{K}_E$ . Conclure. [S]
5. On va prouver, par récurrence sur  $n \geq 0$ , la propriété  $\mathcal{H}_n$  cidessous :
- $\mathcal{H}_n$  : « Soit  $E \subset \mathbb{P}$ , avec  $\text{card}(E) = n$ . Soit  $F \in \mathbb{P}$ , avec  $F \not\subset E$ . Alors  $\Pi_F$  n'est pas dans  $\mathbb{K}_E$  »
- (a) Vérifier que la propriété est vraie si  $n = 0$ . [S]
- Dans la suite de cette question, on fixe  $n \geq 1$ , et on suppose que  $\mathcal{H}_{n-1}$  est vraie.  
Par l'absurde, on suppose que  $\mathcal{H}_n$  est fautive. Il existe donc une partie  $E$  de  $\mathbb{P}$  de cardinal  $n$ , et une partie  $F$  de  $\mathbb{P}$  non incluse dans  $E$ , telles que  $\Pi_F$  soit élément de  $\mathbb{K}_E$ .  
On se donne un élément  $q$  de  $E$ , et on note  $G = E \setminus \{q\}$ .
- (b) Montrer qu'il existe  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{K}_G$ , avec  $y \neq 0$ , tels que  $\Pi_F = x + y\sqrt{q}$ . [S]
- (c) Après élévation au carré, montrer que  $x = 0$  donc  $\Pi_F = y\sqrt{q}$ , avec  $y$  dans  $\mathbb{K}_G$ . [S]
- (d) En discutant suivant la présence de  $q$  dans  $F$ , aboutir à une contradiction et conclure. [S]
6. Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{P}$ , de cardinal  $n$ .  
Montrer que  $\mathbb{K}_E$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension  $2^n$ , et en donner une base. [S]
7. On se donne des parties non vides  $A_1, A_2, \dots, A_m$  de  $\mathbb{P}$ , distinctes deux à deux, avec  $m \geq 1$ .  
Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  des rationnels *non tous nuls*. Pour  $1 \leq k \leq m$ , on note :  $q_k = \prod_{p \in A_k} p$ .  
Montrer que le réel  $x = \sum_{k=1}^m \lambda_k \sqrt{q_k}$  est un irrationnel.
- Exemple : si  $\begin{cases} A_1 = \{2\}, A_2 = \{5\}, A_3 = \{7\}, \\ A_4 = \{2, 5\}, A_5 = \{3, 5\} \end{cases}$ , alors  $\begin{cases} q_1 = 2, q_2 = 5, q_3 = 7 \\ q_4 = 10, q_5 = 15 \end{cases}$
- Pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{\vec{0}\}$ ,  $x = \lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2\sqrt{5} + \lambda_3\sqrt{7} + \lambda_4\sqrt{10} + \lambda_5\sqrt{15}$  est irrationnel. [S]
8. Montrer que  $u_n = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$  n'est jamais un rationnel. [S]