Mathématiques

Concours HEC 99 : corrigé de l'épreuve de Maths I (voie S)

Roger Cuculière,
Professeur en classe préparatoire, lycée Pasteur (Neuilly sur Seine), collaborateur de diverses revues (Quadrature, Tangente, Repères, Sciences et Vie Junior...), co-auteur de "Olympiades internationales de Mathématiques 1988-97", Ed. du choix.

Nota : l'énoncé du sujet n'est pas reproduit ici pour des raisons d'espace éditorial. Il est disponible dans les rapports de jurys transmis par les Écoles à tous les établissements.

Partie I. Propagation déterministe

I. A. Premier modèle de propagation.

I. A. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $u_n(\Delta)$ s'écrit : $u_{n+1}(\Delta)=(1-C\Delta)u_n(\Delta)+C\Delta$. Cette suite est arithmético-géométrique. On cherche le réel α tel que $\alpha=(1-C\Delta)\alpha+C\Delta$, et l'on trouve : $\alpha=1$, et la relation de récurrence susdite s'écrit : $u_{n+1}(\Delta)-1=(1-C\Delta)\big(u_n(\Delta)-1\big)$. La suite $\big(u_n(\Delta)-1\big)$ est une suite géométrique de raison $1-C\Delta$, d'où : $u_n(\Delta)-1=(1-C\Delta)^n\big(u_0(\Delta)-1\big)$, et finalement :

$u_n(\Delta)=(1-C\Delta)^n\left(\frac{1}{N}-1\right)+1$. Conséquence : $\lim_{n\to+\infty}u_n(\Delta)=1$.

I. A. 2. a. Par définition de la partie entière, $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\le\frac{t}{\Delta}<\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1$, d'où : $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\le t<\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1\right)\Delta$, ce qui implique :

$t-\Delta<\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\le t$. Il en résulte : $\lim_{\Delta\to0}\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]=t$.

I. A. 2. b. Soit $n=\left[\frac{t}{\Delta}\right]$. Quand $\Delta\to0$, on a : $\ln\left((1-C\Delta)^n\right)=n\ln(1-C\Delta)\sim-nC\Delta=-\left[\frac{t}{\Delta}\right]C\Delta\to-Ct$. La limite de $(1-C\Delta)^n$ est donc e^{-Ct}, d'où : $\lim_{\Delta\to0}u_{[t/\Delta]}(\Delta)=e^{-Ct}\left(\frac{1}{N}-1\right)+1$.

I. A. 3. La relation donnée équivaut à : $e^{Ct}f'(t)+e^{Ct}Cf(t)=Ce^{Ct}$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. La somme $e^{Ct}f'(t)+e^{Ct}Cf(t)$ est la dérivée de $g(t)=e^{Ct}f(t)$, et la relation précédente s'écrit : $g'(t)=Ce^{Ct}$, d'où : $g(t)=e^{Ct}+K$, où K est une constante. Par suite, $f(t)=e^{-Ct}g(t)=1+Ke^{-Ct}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t=0$, ce qui donne : $\frac{1}{N}=f(0)=1+K$, d'où : $K=\frac{1}{N}-1$, et finalement : $f(t)=1+e^{-Ct}\left(\frac{1}{N}-1\right)$. C'est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.

I. B. Deuxième modèle de propagation.

I. B. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit : $v_{n+1}(\Delta) = (1 + C\Delta)v_n(\Delta) - C\Delta v_n(\Delta)^2$, soit : $v_{n+1}(\Delta) = \varphi(v_n(\Delta))$, où : $\varphi(x) = (1 + C\Delta)x - C\Delta x^2$. Pour $x \le 1$, on a : $\varphi'(x) = (1 + C\Delta) - 2C\Delta x \ge 1 - C\Delta > 0$, ce qui prouve que la fonction φ est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$.

On a : $v_1(\Delta) = (1 + C\Delta)\frac{1}{N} - C\Delta\frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} + C\Delta\left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{N} > \frac{1}{N} = v_0(\Delta)$, et :

$v_1(\Delta) = \varphi(v_0(\Delta)) = \varphi\left(\frac{1}{N}\right) < \varphi(1) = 1$. Ainsi, la relation : $v_n(\Delta) < v_{n+1}(\Delta) < 1$ est vraie pour $n = 0$.

Si cette relation est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors la croissance de la fonction φ conduit à : $\varphi(v_n(\Delta)) < \varphi(v_{n+1}(\Delta)) < \varphi(1)$, soit : $v_{n+1}(\Delta) < v_{n+2}(\Delta) < 1$. Ceci démontre par récurrence que l'on a : $v_n(\Delta) < v_{n+1}(\Delta) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(v_n(\Delta))$ est donc strictement croissante, ce qui prouve que $v_n(\Delta) \ge v_0(\Delta) = \frac{1}{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il en résulte que la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1\right[$. Etant croissante et majorée, cette suite admet une limite L telle que : $\frac{1}{N} \le L \le 1$.

Cette limite vérifie de plus : $\varphi(L) = L$, soit : $L = 0$ ou $L = 1$. Comme $\frac{1}{N} \le L \le 1$, la seule valeur possible de L est : $L = 1$.

Il est ainsi démontré que la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1\right[$, est strictement croissante, et a pour limite 1.

I. B. 2. a. • La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit :

$1 - v_{n+1}(\Delta) = 1 - v_n(\Delta) - C\Delta v_n(\Delta) + C\Delta v_n(\Delta)^2 = (1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta))$. Comme $v_n(\Delta) \ge \frac{1}{N}$, on a :

$1 - C\Delta v_n(\Delta) \le 1 - \frac{C\Delta}{N}$, et comme $v_n(\Delta) < 1$, on a finalement :

$(1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta)) \le (1 - v_n(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)$, soit : $1 - v_{n+1}(\Delta) \le (1 - v_n(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)$.

• L'inégalité précédente implique : $1 - v_n(\Delta) \le (1 - v_0(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$, soit : $0 < 1 - v_n(\Delta) \le \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$.

Comme $0 < C\Delta < 1$ et que $N \ge 4$, il est clair que : $0 < 1 - \frac{C\Delta}{N} < 1$. La série de terme général $\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$ est une série géométrique convergente, et la série de terme général $1 - v_n(\Delta)$ est donc convergente elle aussi.

I. B. 2. b. La définition : $x_n = \frac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}$ implique : $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - v_{n+1}(\Delta)}{1 - v_n(\Delta)} \cdot \frac{1}{1 - C\Delta}$.

La relation : $1 - v_{n+1}(\Delta) = (1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta))$ trouvée en I. B. 2. a. conduit alors à :

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - C\Delta v_n(\Delta)}{1 - C\Delta} = 1 + \frac{C\Delta(1 - v_n(\Delta))}{1 - C\Delta}$. On sait que $1 - v_n(\Delta) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Il en résulte :

$$\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln\left(1 + \frac{C\Delta(1 - v_n(\Delta))}{1 - C\Delta}\right) \sim \frac{C\Delta}{1 - C\Delta}(1 - v_n(\Delta)) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Les séries de termes généraux : $\frac{C\Delta}{1-C\Delta}\left(1-v_n(\Delta)\right)$ et : $\ln x_{n+1}-\ln x_n$ sont deux séries à termes généraux positifs équivalents : elles sont donc de même nature, et la série de terme général $\ln x_{n+1}-\ln x_n$ est donc convergente.

I. B. 2. c. On a : $\ln x_n-\ln x_0=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\ln x_{k+1}-\ln x_k\right)$, qui a pour limite s quand $n\longrightarrow+\infty$. Il en résulte que la limite de $\ln x_n$ est : $s+\ln x_0=s+\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)$. La limite de x_n est donc : $\exp\left(s+\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)=\left(1-\frac{1}{N}\right)e^s$, qui est un réel strictement positif. En conséquence : $1-v_n(\Delta)=x_n(1-C\Delta)^n\sim\left(1-\frac{1}{N}\right)e^s(1-C\Delta)^n$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

I. B. 3. a. On pose : $y_n=\frac{v_n(\Delta)}{\left(1-v_n(\Delta)\right)(1+C\Delta)^n}$. Il vient : $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{v_{n+1}(\Delta)}{1-v_{n+1}(\Delta)}\cdot\frac{1-v_n(\Delta)}{v_n(\Delta)}\cdot\frac{1}{1+C\Delta}$.

Nous avons vu que : $v_{n+1}(\Delta)=v_n(\Delta)\left(1+C\Delta-C\Delta v_n(\Delta)\right)$ et que : $1-v_{n+1}(\Delta)=\left(1-v_n(\Delta)\right)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)$.

Il en résulte : $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{1+C\Delta-C\Delta v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}\cdot\frac{1}{1+C\Delta}$, d'où : $\frac{y_{n+1}}{y_n}-1=\frac{1+C\Delta-C\Delta v_n(\Delta)-\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)(1+C\Delta)}{\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)(1+C\Delta)}$

Le numérateur se simplifie et apparaît égal à : $C^2\Delta^2 v_n(\Delta)$, en sorte que :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=1+\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)}.$$

I. B. 3. b. • La fonction : $u\mapsto\ln(1+u)$, définie pour $u>-1$, a pour dérivée seconde $\frac{-1}{(u+1)^2}$. Cette fonction est donc concave, ce qui implique que son graphe est situé au-dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente à l'origine, dont l'équation est : $y=u$. Il en résulte : $\ln(1+u)\le u$ pour tout pour $u>-1$.

Si l'on ne veut pas utiliser la convexité, on peut étudier la fonction auxiliaire : $\varphi(u)=u-\ln(1+u)$.

• Cette inégalité : $\ln(1+u)\le u$, appliquée au résultat de la question I. 3. B. a., conduit à :

$$\ln y_{n+1}-\ln y_n=\ln\frac{y_{n+1}}{y_n}=\ln\left(1+\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)}\right)\le\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)}\le\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}.$$

Puisque $v_n(\Delta)<1$, on a : $\frac{v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}<\frac{1}{1-C\Delta}$, d'où : $\ln y_{n+1}-\ln y_n\le\frac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

En conséquence : $\ln\frac{y_q}{y_0}=\ln y_q-\ln y_0=\sum_{n=0}^{q-1}\left(\ln y_{n+1}-\ln y_n\right)\le q\frac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

Par ailleurs, il est clair que $y_0=\frac{v_0(\Delta)}{1-v_q(\Delta)}=\frac{1}{N-1}$, d'où : $\frac{y_q}{y_0}=\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{\left(1-v_q(\Delta)\right)(1+C\Delta)^q}$.

On a ainsi démontré que : $\ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{\left(1-v_q(\Delta)\right)(1+C\Delta)^q}\right)\le q\frac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

I. B. 3. c. L'expression de $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ trouvée en I. B. 3. a. montre que $\frac{y_{n+1}}{y_n}>1$, ce qui signifie que la suite (y_n) est croissante, d'où l'on déduit : $\frac{y_q}{y_0} > 1$. Le résultat de I. B. 3. c. se précise donc ainsi :

$$0 < \ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{\left(1-v_q(\Delta)\right)(1+C\Delta)^q}\right) \leq \Delta\frac{C^2 q\Delta}{1-C\Delta}.$$

Soit $q = \left[\frac{t}{\Delta}\right]$. On sait que la limite de $q\Delta$, quand $\Delta \longrightarrow 0$, est t (question I. A. 2. a.). L'encadrement précédent permet donc d'affirmer : $\lim\limits_{\Delta\to 0} \ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{\left(1-v_q(\Delta)\right)(1+C\Delta)^q}\right) = 0$, d'où : $\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{\left(1-v_q(\Delta)\right)(1+C\Delta)^q} = 1+o(1)$.

On démontre comme en I. A. 2. b. que la limite de $(1+C\Delta)^q$, quand $\Delta \longrightarrow 0$, est e^{Ct}, d'où :

$\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)} = (1+o(1))\left(e^{Ct}+o(1)\right) = e^{Ct}+o(1)$. En conséquence, la limite de $\frac{v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)}$ est : $\frac{e^{Ct}}{N-1}$, la limite de $\frac{1-v_q(\Delta)}{v_q(\Delta)}$ est : $(N-1)e^{-Ct}$, la limite de $\frac{1}{v_q(\Delta)}$ est : $1+(N-1)e^{-Ct}$, et enfin :

$$\lim_{\Delta\to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta) = \frac{1}{1+e^{-Ct}(N-1)}.$$

I. B. 4. La relation donnée équivaut à : $\frac{h'(t)}{h(t)^2} = C\left(\frac{1}{h(t)}-1\right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto -\frac{h'(t)}{h(t)^2}$ est la dérivée de $H(t) = \frac{1}{h(t)}$, et la relation précédente s'écrit : $H'(t) = C(1-H(t))$, et cette fonction $H(t)$ satisfait à la même relation que la fonction $f(t)$ de la question I. A. 3. . On en déduit immédiatement :

$H(t) = 1+Ke^{-Ct}$, où K est une constante, donc : $h(t) = \frac{1}{1+Ke^{-Ct}}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t = 0$, ce qui donne :

$\frac{1}{N} = h(0) = \frac{1}{1+K}$, d'où : $K = N-1$, et finalement : $h(t) = \frac{1}{1+(N-1)e^{-Ct}}$. C'est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.

Partie II. Propagation probabiliste

II. A. Une formule dans le cas discret.

II. A. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,\ldots,N-1\}$. A l'instant $(n+1)\Delta$, il reste exactement r personnes non informées si et seulement si :

- ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement $r+1$ personnes non informées *et* une de ces personnes est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta,(n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)\left(N-(r+1)\right)$.

- ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement r personnes non informées *et* aucune personne supplémentaire n'est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta,(n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$P_n(\Delta,r)\left(1-\beta\Delta r(N-r)\right)$.

La formule des probabilités totales se traduit donc par l'égalité :

$P_{n+1}(\Delta,r) = P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)\left(N-(r+1)\right) + P_n(\Delta,r)\left(1-\beta\Delta r(N-r)\right)$, ce qui est la formule demandée.