Mathématiques

Concours HEC 99 : corrigé de l'épreuve de Maths I (voie S)

Roger Cuculière,
Professeur en classe préparatoire, lycée Pasteur (Neuilly sur Seine), collaborateur de diverses revues (Quadrature, Tangente, Repères, Sciences et Vie Junior...), co-auteur de "Olympiades internationales de Mathématiques 1988-97", Ed. du choix.

Nota : l'énoncé du sujet n'est pas reproduit ici pour des raisons d'espace éditorial. Il est disponible dans les rapports de jurys transmis par les Écoles à tous les établissements.

Partie I. Propagation déterministe

I. A. Premier modèle de propagation.

I. A. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $u_n(\Delta)$ s'écrit : $u_{n+1}(\Delta)=(1-C\Delta)u_n(\Delta)+C\Delta$. Cette suite est arithmético-géométrique. On cherche le réel α tel que $\alpha=(1-C\Delta)\alpha+C\Delta$, et l'on trouve : $\alpha=1$, et la relation de récurrence susdite s'écrit : $u_{n+1}(\Delta)-1=(1-C\Delta)(u_n(\Delta)-1)$. La suite $(u_n(\Delta)-1)$ est une suite géométrique de raison $1-C\Delta$, d'où : $u_n(\Delta)-1=(1-C\Delta)^n(u_0(\Delta)-1)$, et finalement :

$u_n(\Delta)=(1-C\Delta)^n\left(\frac{1}{N}-1\right)+1$. Conséquence : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(\Delta)=1$.

I. A. 2. a. Par définition de la partie entière, $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq\frac{t}{\Delta}<\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1$, d'où : $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\leq t<\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1\right)\Delta$, ce qui implique :

$t-\Delta<\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq t$. Il en résulte : $\lim\limits_{\Delta\to0}\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]=t$.

I. A. 2. b. Soit $n=\left[\frac{t}{\Delta}\right]$. Quand $\Delta\to0$, on a : $\ln\left((1-C\Delta)^n\right)=n\ln(1-C\Delta)\sim-nC\Delta=-\left[\frac{t}{\Delta}\right]C\Delta\to-Ct$. La limite de $(1-C\Delta)^n$ est donc e^{-Ct}, d'où : $\lim\limits_{\Delta\to0}u_{[t/\Delta]}(\Delta)=e^{-Ct}\left(\frac{1}{N}-1\right)+1$.

I. A. 3. La relation donnée équivaut à : $e^{Ct}f'(t)+e^{Ct}Cf(t)=Ce^{Ct}$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. La somme $e^{Ct}f'(t)+e^{Ct}Cf(t)$ est la dérivée de $g(t)=e^{Ct}f(t)$, et la relation précédente s'écrit : $g'(t)=Ce^{Ct}$, d'où : $g(t)=e^{Ct}+K$, où K est une constante. Par suite, $f(t)=e^{-Ct}g(t)=1+Ke^{-Ct}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t=0$, ce qui donne : $\frac{1}{N}=f(0)=1+K$, d'où : $K=\frac{1}{N}-1$, et finalement : $f(t)=1+e^{-Ct}\left(\frac{1}{N}-1\right)$. C'est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.

I. B. Deuxième modèle de propagation.

I. B. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit : $v_{n+1}(\Delta)=(1+C\Delta)v_n(\Delta)-C\Delta v_n(\Delta)^2$, soit : $v_{n+1}(\Delta)=\varphi(v_n(\Delta))$, où : $\varphi(x)=(1+C\Delta)x-C\Delta x^2$. Pour $x\le 1$, on a : $\varphi'(x)=(1+C\Delta)-2C\Delta x\ge 1-C\Delta>0$, ce qui prouve que la fonction φ est strictement croissante sur $]-\infty,1]$.

On a : $v_1(\Delta)=(1+C\Delta)\dfrac{1}{N}-C\Delta\dfrac{1}{N^2}=\dfrac{1}{N}+C\Delta\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\dfrac{1}{N}>\dfrac{1}{N}=v_0(\Delta)$, et :

$v_1(\Delta)=\varphi(v_0(\Delta))=\varphi\left(\dfrac{1}{N}\right)<\varphi(1)=1$. Ainsi, la relation : $v_n(\Delta)<v_{n+1}(\Delta)<1$ est vraie pour $n=0$.

Si cette relation est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$, alors la croissance de la fonction φ conduit à : $\varphi(v_n(\Delta))<\varphi(v_{n+1}(\Delta))<\varphi(1)$, soit : $v_{n+1}(\Delta)<v_{n+2}(\Delta)<1$. Ceci démontre par récurrence que l'on a : $v_n(\Delta)<v_{n+1}(\Delta)<1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

La suite $(v_n(\Delta))$ est donc strictement croissante, ce qui prouve que $v_n(\Delta)\ge v_0(\Delta)=\dfrac{1}{N}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et il en résulte que la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{N},1\right[$. Etant croissante et majorée, cette suite admet une limite L telle que : $\dfrac{1}{N}\le L\le 1$.

Cette limite vérifie de plus : $\varphi(L)=L$, soit : $L=0$ ou $L=1$. Comme $\dfrac{1}{N}\le L\le 1$, la seule valeur possible de L est : $L=1$.

Il est ainsi démontré que la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{N},1\right[$, est strictement croissante, et a pour limite 1.

I. B. 2. a. • La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit :

$1-v_{n+1}(\Delta)=1-v_n(\Delta)-C\Delta v_n(\Delta)+C\Delta v_n(\Delta)^2=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$. Comme $v_n(\Delta)\ge\dfrac{1}{N}$, on a :

$1-C\Delta v_n(\Delta)\le 1-\dfrac{C\Delta}{N}$, et comme $v_n(\Delta)<1$, on a finalement :

$(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))\le(1-v_n(\Delta))\left(1-\dfrac{C\Delta}{N}\right)$, soit : $1-v_{n+1}(\Delta)\le(1-v_n(\Delta))\left(1-\dfrac{C\Delta}{N}\right)$.

• L'inégalité précédente implique : $1-v_n(\Delta)\le(1-v_0(\Delta))\left(1-\dfrac{C\Delta}{N}\right)^n$, soit : $0<1-v_n(\Delta)\le\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\left(1-\dfrac{C\Delta}{N}\right)^n$.

Comme $0<C\Delta<1$ et que $N\ge 4$, il est clair que : $0<1-\dfrac{C\Delta}{N}<1$. La série de terme général $\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\left(1-\dfrac{C\Delta}{N}\right)^n$ est une série géométrique convergente, et la série de terme général $1-v_n(\Delta)$ est donc convergente elle aussi.

I. B. 2. b. La définition : $x_n=\dfrac{1-v_n(\Delta)}{(1-C\Delta)^n}$ implique : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1-v_{n+1}(\Delta)}{1-v_n(\Delta)}\cdot\dfrac{1}{1-C\Delta}$.

La relation : $1-v_{n+1}(\Delta)=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$ trouvée en I. B. 2. a. conduit alors à :

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1-C\Delta v_n(\Delta)}{1-C\Delta}=1+\dfrac{C\Delta(1-v_n(\Delta))}{1-C\Delta}$. On sait que $1-v_n(\Delta)\longrightarrow 0$ quand $n\longrightarrow+\infty$. Il en résulte :

$\ln x_{n+1}-\ln x_n=\ln\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\ln\left(1+\dfrac{C\Delta(1-v_n(\Delta))}{1-C\Delta}\right)\sim\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}(1-v_n(\Delta))$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

Les séries de termes généraux : $\frac{C\Delta}{1-C\Delta}(1-v_n(\Delta))$ et : $\ln x_{n+1} - \ln x_n$ sont deux séries à termes généraux positifs équivalents : elles sont donc de même nature, et la série de terme général $\ln x_{n+1} - \ln x_n$ est donc convergente.

I. B. 2. c. On a : $\ln x_n - \ln x_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(\ln x_{k+1} - \ln x_k)$, qui a pour limite s quand $n \longrightarrow +\infty$. Il en résulte que la limite de $\ln x_n$ est : $s + \ln x_0 = s + \ln\left(1-\frac{1}{N}\right)$. La limite de x_n est donc : $\exp\left(s+\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\right) = \left(1-\frac{1}{N}\right)e^s$, qui est un réel strictement positif. En conséquence : $1 - v_n(\Delta) = x_n(1-C\Delta)^n \sim \left(1-\frac{1}{N}\right)e^s(1-C\Delta)^n$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

I. B. 3. a. On pose : $y_n = \frac{v_n(\Delta)}{(1-v_n(\Delta))(1+C\Delta)^n}$. Il vient : $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{v_{n+1}(\Delta)}{1-v_{n+1}(\Delta)}.\frac{1-v_n(\Delta)}{v_n(\Delta)}.\frac{1}{1+C\Delta}$.

Nous avons vu que : $v_{n+1}(\Delta) = v_n(\Delta)(1+C\Delta - C\Delta v_n(\Delta))$ et que : $1 - v_{n+1}(\Delta) = (1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$.

Il en résulte : $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+C\Delta - C\Delta v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}.\frac{1}{1+C\Delta}$, d'où : $\frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 = \frac{1+C\Delta - C\Delta v_n(\Delta) - (1-C\Delta v_n(\Delta))(1+C\Delta)}{(1-C\Delta v_n(\Delta))(1+C\Delta)}$

Le numérateur se simplifie et apparaît égal à : $C^2\Delta^2 v_n(\Delta)$, en sorte que :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_n(\Delta))}.$$

I. B. 3. b. • La fonction : $u \mapsto \ln(1+u)$, définie pour $u > -1$, a pour dérivée seconde $\frac{-1}{(u+1)^2}$. Cette fonction est donc concave, ce qui implique que son graphe est situé au-dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente à l'origine, dont l'équation est : $y = u$. Il en résulte : $\ln(1+u) \leq u$ pour tout pour $u > -1$.

Si l'on ne veut pas utiliser la convexité, on peut étudier la fonction auxiliaire : $\varphi(u) = u - \ln(1+u)$.

• Cette inégalité : $\ln(1+u) \leq u$, appliquée au résultat de la question I. 3. B. a., conduit à :

$$\ln y_{n+1} - \ln y_n = \ln\frac{y_{n+1}}{y_n} = \ln\left(1+\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_n(\Delta))}\right) \leq \frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_n(\Delta))} \leq \frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}.$$

Puisque $v_n(\Delta) < 1$, on a : $\frac{v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)} < \frac{1}{1-C\Delta}$, d'où : $\ln y_{n+1} - \ln y_n \leq \frac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

En conséquence : $\ln\frac{y_q}{y_0} = \ln y_q - \ln y_0 = \sum_{n=0}^{q-1}(\ln y_{n+1} - \ln y_n) \leq q\frac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

Par ailleurs, il est clair que $y_0 = \frac{v_0(\Delta)}{1-v_q(\Delta)} = \frac{1}{N-1}$, d'où : $\frac{y_q}{y_0} = \frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q}$.

On a ainsi démontré que : $\ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q}\right) \leq q\frac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

I. B. 3. c. L'expression de $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ trouvée en I. B. 3. a. montre que $\frac{y_{n+1}}{y_n} > 1$, ce qui signifie que la suite (y_n) est croissante, d'où l'on déduit : $\frac{y_q}{y_0} > 1$. Le résultat de I. B. 3. c. se précise donc ainsi :

$$0 < \ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q}\right) \leq \Delta\frac{C^2 q\Delta}{1-C\Delta}.$$

Soit $q = \left[\frac{t}{\Delta}\right]$. On sait que la limite de $q\Delta$, quand $\Delta \longrightarrow 0$, est t (question I. A. 2. a.). L'encadrement précédent permet donc d'affirmer : $\lim\limits_{\Delta\to 0} \ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q}\right) = 0$, d'où : $\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q} = 1 + o(1)$.

On démontre comme en I. A. 2. b. que la limite de $(1+C\Delta)^q$, quand $\Delta \longrightarrow 0$, est e^{Ct}, d'où :

$\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)} = (1+o(1))(e^{Ct}+o(1)) = e^{Ct}+o(1)$. En conséquence, la limite de $\frac{v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)}$ est : $\frac{e^{Ct}}{N-1}$, la limite de $\frac{1-v_q(\Delta)}{v_q(\Delta)}$ est : $(N-1)e^{-Ct}$, la limite de $\frac{1}{v_q(\Delta)}$ est : $1+(N-1)e^{-Ct}$, et enfin :

$$\lim_{\Delta\to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta) = \frac{1}{1+e^{-Ct}(N-1)}.$$

I. B. 4. La relation donnée équivaut à : $\frac{h'(t)}{h(t)^2} = C\left(\frac{1}{h(t)}-1\right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto -\frac{h'(t)}{h(t)^2}$ est la dérivée de $H(t) = \frac{1}{h(t)}$, et la relation précédente s'écrit : $H'(t) = C(1-H(t))$, et cette fonction $H(t)$ satisfait à la même relation que la fonction $f(t)$ de la question I. A. 3. . On en déduit immédiatement :

$H(t) = 1+Ke^{-Ct}$, où K est une constante, donc : $h(t) = \frac{1}{1+Ke^{-Ct}}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t = 0$, ce qui donne :

$\frac{1}{N} = h(0) = \frac{1}{1+K}$, d'où : $K = N-1$, et finalement : $h(t) = \frac{1}{1+(N-1)e^{-Ct}}$. C'est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.

Partie II. Propagation probabiliste

II. A. Une formule dans le cas discret.

II. A. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,\ldots,N-1\}$. A l'instant $(n+1)\Delta$, il reste exactement r personnes non informées si et seulement si :

- ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement $r+1$ personnes non informées *et* une de ces personnes est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta,(n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-(r+1))$.

- ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement r personnes non informées *et* aucune personne supplémentaire n'est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta,(n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r))$.

La formule des probabilités totales se traduit donc par l'égalité :

$P_{n+1}(\Delta,r) = P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-(r+1)) + P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r))$, ce qui est la formule demandée.