



Concours HEC 99 : corrigé de l'épreuve de Maths I (voie S)

Roger Cuculière,

Professeur en classe préparatoire, lycée Pasteur (Neuilly sur Seine),
collaborateur de diverses revues (Quadrature, Tangente, Repères,
Sciences et Vie Junior...), co-auteur de "Olympiades internationales
de Mathématiques 1988-97", Ed. du choix.

*Nota : l'énoncé du sujet n'est pas reproduit ici pour des raisons d'espace éditorial.
Il est disponible dans les rapports de jurys transmis par les Ecoles à tous les établissements.*

Partie I. Propagation déterministe

I. A. Premier modèle de propagation.

I. A. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $u_n(\Delta)$ s'écrit : $u_{n+1}(\Delta) = (1 - C\Delta)u_n(\Delta) + C\Delta$. Cette suite est arithmético-géométrique. On cherche le réel α tel que $\alpha = (1 - C\Delta)\alpha + C\Delta$, et l'on trouve : $\alpha = 1$, et la relation de récurrence susdite s'écrit : $u_{n+1}(\Delta) - 1 = (1 - C\Delta)(u_n(\Delta) - 1)$. La suite $(u_n(\Delta) - 1)$ est une suite géométrique de raison $1 - C\Delta$, d'où : $u_n(\Delta) - 1 = (1 - C\Delta)^n(u_0(\Delta) - 1)$, et finalement :

$$u_n(\Delta) = (1 - C\Delta)^n \left(\frac{1}{N} - 1 \right) + 1. \text{ Conséquence : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\Delta) = 1.$$

I. A. 2. a. Par définition de la partie entière, $\left[\frac{t}{\Delta} \right] \leq \frac{t}{\Delta} < \left[\frac{t}{\Delta} \right] + 1$, d'où : $\left[\frac{t}{\Delta} \right] \Delta \leq t < \left(\left[\frac{t}{\Delta} \right] + 1 \right) \Delta$, ce qui implique :

$$t - \Delta < \Delta \left[\frac{t}{\Delta} \right] \leq t. \text{ Il en résulte : } \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \left[\frac{t}{\Delta} \right] = t.$$

I. A. 2. b. Soit $n = \left[\frac{t}{\Delta} \right]$. Quand $\Delta \rightarrow 0$, on a : $\ln((1 - C\Delta)^n) = n \ln(1 - C\Delta) \sim -nC\Delta = -\left[\frac{t}{\Delta} \right] C\Delta \rightarrow -Ct$. La limite de $(1 - C\Delta)^n$ est donc e^{-Ct} , d'où : $\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\left[\frac{t}{\Delta} \right]}(\Delta) = e^{-Ct} \left(\frac{1}{N} - 1 \right) + 1$.

I. A. 3. La relation donnée équivaut à : $e^{Ct} f'(t) + e^{Ct} C f(t) = C e^{Ct}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La somme $e^{Ct} f'(t) + e^{Ct} C f(t)$ est la dérivée de $g(t) = e^{Ct} f(t)$, et la relation précédente s'écrit : $g'(t) = C e^{Ct}$, d'où : $g(t) = e^{Ct} + K$, où K est une constante. Par suite, $f(t) = e^{-Ct} g(t) = 1 + K e^{-Ct}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t = 0$, ce qui donne : $\frac{1}{N} = f(0) = 1 + K$, d'où :

$$K = \frac{1}{N} - 1, \text{ et finalement : } f(t) = 1 + e^{-Ct} \left(\frac{1}{N} - 1 \right). \text{ C'est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.}$$

Référence

I. B. Deuxième modèle de propagation.

I. B. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit : $v_{n+1}(\Delta) = (1 + C\Delta)v_n(\Delta) - C\Delta v_n(\Delta)^2$, soit :

$v_{n+1}(\Delta) = \varphi(v_n(\Delta))$, où : $\varphi(x) = (1 + C\Delta)x - C\Delta x^2$. Pour $x \leq 1$, on a : $\varphi'(x) = (1 + C\Delta) - 2C\Delta x \geq 1 - C\Delta > 0$, ce qui prouve que la fonction φ est strictement croissante sur $] -\infty, 1]$.

On a : $v_1(\Delta) = (1 + C\Delta)\frac{1}{N} - C\Delta\frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} + C\Delta\left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{N} > \frac{1}{N} = v_0(\Delta)$, et :

$v_1(\Delta) = \varphi(v_0(\Delta)) = \varphi\left(\frac{1}{N}\right) < \varphi(1) = 1$. Ainsi, la relation : $v_n(\Delta) < v_{n+1}(\Delta) < 1$ est vraie pour $n = 0$.

Si cette relation est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors la croissance de la fonction φ conduit à : $\varphi(v_n(\Delta)) < \varphi(v_{n+1}(\Delta)) < \varphi(1)$, soit : $v_{n+1}(\Delta) < v_{n+2}(\Delta) < 1$. Ceci démontre par récurrence que l'on a : $v_n(\Delta) < v_{n+1}(\Delta) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(v_n(\Delta))$ est donc strictement croissante, ce qui prouve que $v_n(\Delta) \geq v_0(\Delta) = \frac{1}{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il en résulte que

la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1\right]$. Étant croissante et majorée, cette suite admet une limite L telle que : $\frac{1}{N} \leq L \leq 1$.

Cette limite vérifie de plus : $\varphi(L) = L$, soit : $L = 0$ ou $L = 1$. Comme $\frac{1}{N} \leq L \leq 1$, la seule valeur possible de L est : $L = 1$.

Il est ainsi démontré que la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1\right]$, est strictement croissante, et a pour limite 1.

I. B. 2. a. • La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit :

$1 - v_{n+1}(\Delta) = 1 - v_n(\Delta) - C\Delta v_n(\Delta) + C\Delta v_n(\Delta)^2 = (1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta))$. Comme $v_n(\Delta) \geq \frac{1}{N}$, on a :

$1 - C\Delta v_n(\Delta) \leq 1 - \frac{C\Delta}{N}$, et comme $v_n(\Delta) < 1$, on a finalement :

$(1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta)) \leq (1 - v_n(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)$, soit : $1 - v_{n+1}(\Delta) \leq (1 - v_n(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)$.

• L'inégalité précédente implique : $1 - v_n(\Delta) \leq (1 - v_0(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$, soit : $0 < 1 - v_n(\Delta) \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$.

Comme $0 < C\Delta < 1$ et que $N \geq 4$, il est clair que : $0 < 1 - \frac{C\Delta}{N} < 1$. La série de terme général $\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$ est une série géométrique convergente, et la série de terme général $1 - v_n(\Delta)$ est donc convergente elle aussi.

I. B. 2. b. La définition : $x_n = \frac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}$ implique : $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - v_{n+1}(\Delta)}{1 - v_n(\Delta)} \cdot \frac{1}{1 - C\Delta}$.

La relation : $1 - v_{n+1}(\Delta) = (1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta))$ trouvée en I. B. 2. a. conduit alors à :

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - C\Delta v_n(\Delta)}{1 - C\Delta} = 1 + \frac{C\Delta(1 - v_n(\Delta))}{1 - C\Delta}$. On sait que $1 - v_n(\Delta) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Il en résulte :

$\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln \left(1 + \frac{C\Delta(1 - v_n(\Delta))}{1 - C\Delta}\right) \sim \frac{C\Delta}{1 - C\Delta}(1 - v_n(\Delta))$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Référence

Les séries de termes généraux : $\frac{C\Delta}{1-C\Delta}(1-v_n(\Delta))$ et : $\ln x_{n+1} - \ln x_n$ sont deux séries à termes généraux positifs équivalents : elles sont donc de même nature, et la série de terme général $\ln x_{n+1} - \ln x_n$ est donc convergente.

I. B. 2. c. On a : $\ln x_n - \ln x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln x_{k+1} - \ln x_k)$, qui a pour limite s quand $n \rightarrow +\infty$. Il en résulte que la limite de $\ln x_n$ est : $s + \ln x_0 = s + \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. La limite de x_n est donc : $\exp\left(s + \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)e^s$, qui est un réel strictement positif. En conséquence : $1 - v_n(\Delta) = x_n(1 - C\Delta)^n \sim \left(1 - \frac{1}{N}\right)e^s(1 - C\Delta)^n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

I. B. 3. a. On pose : $y_n = \frac{v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}$. Il vient : $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{v_{n+1}(\Delta)}{1 - v_{n+1}(\Delta)} \cdot \frac{1 - v_n(\Delta)}{v_n(\Delta)} \cdot \frac{1}{1 + C\Delta}$.

Nous avons vu que : $v_{n+1}(\Delta) = v_n(\Delta)(1 + C\Delta - C\Delta v_n(\Delta))$ et que : $1 - v_{n+1}(\Delta) = (1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta))$.

Il en résulte : $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1 + C\Delta - C\Delta v_n(\Delta)}{1 - C\Delta v_n(\Delta)} \cdot \frac{1}{1 + C\Delta}$, d'où : $\frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 = \frac{1 + C\Delta - C\Delta v_n(\Delta) - (1 - C\Delta v_n(\Delta))(1 + C\Delta)}{(1 - C\Delta v_n(\Delta))(1 + C\Delta)}$

Le numérateur se simplifie et apparaît égal à : $C^2\Delta^2 v_n(\Delta)$, en sorte que :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_n(\Delta))}.$$

I. B. 3. b. • La fonction : $u \mapsto \ln(1 + u)$, définie pour $u > -1$, a pour dérivée seconde $\frac{-1}{(u+1)^2}$. Cette fonction est donc concave, ce qui implique que son graphe est situé au-dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente à l'origine, dont l'équation est : $y = u$. Il en résulte : $\ln(1 + u) \leq u$ pour tout $u > -1$.

Si l'on ne veut pas utiliser la convexité, on peut étudier la fonction auxiliaire : $\varphi(u) = u - \ln(1 + u)$.

• Cette inégalité : $\ln(1 + u) \leq u$, appliquée au résultat de la question I. 3. B. a., conduit à :

$$\ln y_{n+1} - \ln y_n = \ln \frac{y_{n+1}}{y_n} = \ln \left(1 + \frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_n(\Delta))} \right) \leq \frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_n(\Delta))} \leq \frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{1 - C\Delta v_n(\Delta)}.$$

Puisque $v_n(\Delta) < 1$, on a : $\frac{v_n(\Delta)}{1 - C\Delta v_n(\Delta)} < \frac{1}{1 - C\Delta}$, d'où : $\ln y_{n+1} - \ln y_n \leq \frac{C^2\Delta^2}{1 - C\Delta}$.

En conséquence : $\ln \frac{y_q}{y_0} = \ln y_q - \ln y_0 = \sum_{n=0}^{q-1} (\ln y_{n+1} - \ln y_n) \leq q \frac{C^2\Delta^2}{1 - C\Delta}$.

Par ailleurs, il est clair que $y_0 = \frac{v_0(\Delta)}{1 - v_q(\Delta)} = \frac{1}{N-1}$, d'où : $\frac{y_q}{y_0} = \frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1 - v_q(\Delta))(1 + C\Delta)^q}$.

On a ainsi démontré que : $\ln \left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1 - v_q(\Delta))(1 + C\Delta)^q} \right) \leq q \frac{C^2\Delta^2}{1 - C\Delta}$.

I. B. 3. c. L'expression de $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ trouvée en I. B. 3. a. montre que $\frac{y_{n+1}}{y_n} > 1$, ce qui signifie que la suite (y_n) est croissante, d'où

Référence

l'on déduit : $\frac{y_q}{y_0} > 1$. Le résultat de I. B. 3. c. se précise donc ainsi :

$$0 < \ln \left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q} \right) \leq \Delta \frac{C^2 q \Delta}{1-C\Delta}.$$

Soit $q = \left\lceil \frac{t}{\Delta} \right\rceil$. On sait que la limite de $q\Delta$, quand $\Delta \rightarrow 0$, est t (question I. A. 2. a.). L'encadrement précédent permet donc

$$\text{d'affirmer : } \lim_{\Delta \rightarrow 0} \ln \left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q} \right) = 0, \text{ d'où : } \frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q} = 1 + o(1).$$

On démontre comme en I. A. 2. b. que la limite de $(1+C\Delta)^q$, quand $\Delta \rightarrow 0$, est e^{Ct} , d'où :

$$\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)} = (1+o(1))(e^{Ct} + o(1)) = e^{Ct} + o(1). \text{ En conséquence, la limite de } \frac{v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)} \text{ est : } \frac{e^{Ct}}{N-1}, \text{ la limite de } \frac{1-v_q(\Delta)}{v_q(\Delta)}$$

est : $(N-1)e^{-Ct}$, la limite de $\frac{1}{v_q(\Delta)}$ est : $1 + (N-1)e^{-Ct}$, et enfin :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\lceil t/\Delta \rceil}(\Delta) = \frac{1}{1 + e^{-Ct}(N-1)}.$$

I. B. 4. La relation donnée équivaut à : $\frac{h'(t)}{h(t)^2} = C \left(\frac{1}{h(t)} - 1 \right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto -\frac{h'(t)}{h(t)^2}$ est la dérivée de

$H(t) = \frac{1}{h(t)}$, et la relation précédente s'écrit : $H'(t) = C(1 - H(t))$, et cette fonction $H(t)$ satisfait à la même relation que la

fonction $f(t)$ de la question I. A. 3. . On en déduit immédiatement :

$H(t) = 1 + Ke^{-Ct}$, où K est une constante, donc : $h(t) = \frac{1}{1 + Ke^{-Ct}}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t = 0$, ce qui donne :

$\frac{1}{N} = h(0) = \frac{1}{1+K}$, d'où : $K = N - 1$, et finalement : $h(t) = \frac{1}{1 + (N-1)e^{-Ct}}$. C est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.

Partie II. Propagation probabiliste ■

II. A. Une formule dans le cas discret.

II.A. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. A l'instant $(n+1)\Delta$, il reste exactement r personnes non informées si et seulement si :

• ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement $r+1$ personnes non informées et une de ces personnes est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta, (n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$$P_n(\Delta, r+1) \beta \Delta (r+1) (N - (r+1)).$$

• ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement r personnes non informées et aucune personne supplémentaire n'est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta, (n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$$P_n(\Delta, r) (1 - \beta \Delta r (N - r)).$$

La formule des probabilités totales se traduit donc par l'égalité :

$$P_{n+1}(\Delta, r) = P_n(\Delta, r+1) \beta \Delta (r+1) (N - (r+1)) + P_n(\Delta, r) (1 - \beta \Delta r (N - r)), \text{ ce qui est la formule demandée.}$$

Référence