Sur les traces de Leonardo Pisano

On définit la *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\geq 0}$ par : $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \geq 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On a donc $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, etc.
On définit ainsi une suite d'entiers naturels, strictement croissante à partir du rang 2.

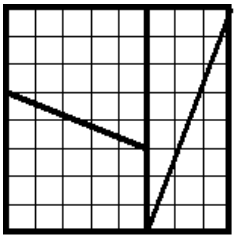
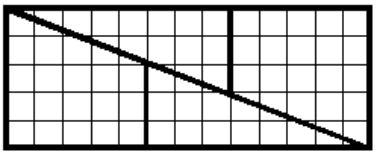
Leonardo Pisano, dit Fibonacci (1170-1250) : par son oeuvre principale, le « liber abaci », il a introduit et popularisé la numérotation positionnelle utilisant les chiffres arabes. Les entiers F_n y apparaissent dans un problème relatif à la descendance d'un couple de lapins. C'est le mathématicien français Edouard Lucas (1842-1891) qui baptisa cette suite et en découvrit d'intéressantes propriétés.

Première partie

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de divisibilité portant sur les entiers F_n.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, prouver la relation de Cassini : $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les entiers F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux.
   Jean-Baptiste Cassini (1625-1712), astronome à qui on doit la découverte des satellites de Jupiter. [S]

2. Pouvez-vous expliquer le paradoxe suivant, attribué à Lewis Carrol ?
   On découpe un carré 8×8 comme indiqué en deux triangles et deux trapèzes.
   On réarrange les quatre morceaux en un seul rectangle de taille 5×13.
   Avant découpe, l'aire totale vaut 64.
   Après réarrangement elle vaut 65.
   D'où vient le carré supplémentaire ?

   Généraliser très soigneusement en utilisant les entiers F_n.
   Lewis Carrol, 1832-1898, logicien et écrivain britannique. Auteur de « Alice au Pays des Merveilles ». [S]

3. Montrer que pour tout (n, m) de $\mathbb{N}^2$, on a $F_{n+m+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$. [S]

4. En déduire que pour tout (q, n) de $\mathbb{N}^2$, F_{qn} est un multiple de F_n. [S]

5. On se donne (m, n) dans $\mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$. Soit d un entier naturel.
   Montrer que si d divise F_n et F_m, alors il divise F_{n-m} (utiliser les questions 1 et 3.) [S]

6. En déduire que pour tous entiers m et n on a : $F_m \wedge F_n = F_{m\wedge n}$.
   Indication : on sera amené à démontrer que si p divise F_m et F_n, alors il divise $F_{m\wedge n}$.
   Pour cela, on raisonnera par récurrence sur la valeur de $m+n$, et on utilisera la question 5. [S]

7. Montrer qu'on peut maintenant compléter le résultat de la question 4 de la façon suivante :
   Pour tout entier $n \geq 3$, et pour tout entier m, on a l'équivalence : $F_n \mid F_m \Leftrightarrow n \mid m$. [S]

8. Dans cette question on va prouver le lemme de Yuri Matijasevitch (1970) :
   « Pour $n \geq 3$ et $m \geq 0$: F_m est divisible par F_n^2 si et seulement si m est divisible par nF_n »
   (a) Par récurrence sur k, montrer les congruences $\begin{cases} F_{kn} \equiv kF_nF_{n+1}^{k-1} & (F_n^2) \\ F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k & (F_n^2) \end{cases}$ [S]
   (b) Conclure [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des problèmes relatifs à des sommes d'entiers F_n.

1. Montrer que pour tout entier n, on a l'égalité $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$. [S]
2. Montrer $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$, pour tout $n \geq 0$. [S]
3. On note Φ la solution positive de $x^2 = x + 1$. Donc $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le *nombre d'or*).
   On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k x^k$ pour tout réel x et tout entier n.
   (a) Montrer que pour tout entier n, on a l'encadrement $0 \leq F_n \leq \Phi^n$. [S]
   (b) En déduire que la suite $n \mapsto S_n(x)$ est convergente pour tout x de $I =]-1/\Phi, 1/\Phi[$. [S]
   (c) Pour $x \in I$, on note $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k x^k = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$. Prouver : $S(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ [S]
   (d) Calculer $y = 0.1+0.01+0.002+0.0003+0.00005+0.000008+0.0000013+0.00000021+\cdots$ [S]
4. On va établir que tout entier s'écrit de façon unique comme somme d'entiers F_n non consécutifs (C'est le *Théorème de Zeckendorf* (1972).) On notera $n \gg m$ pour exprimer que $n \geq m+2$.
   (a) Montrer que $F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + \cdots = F_{n+1} - \varepsilon$, où $\varepsilon = 1$ si n est pair, et $\varepsilon = 0$ sinon. [S]
   (b) Soit n un entier naturel strictement positif.
   On suppose qu'il existe $k_0 \gg k_1 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$ ($p \geq 0$) tels que $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \cdots + F_{k_p}$.
   Montrer que k_0 est nécessairement l'entier k maximum tel que $F_k \leq n$. [S]
   (c) Soit n un entier naturel strictement positif. Montrer qu'il existe une unique décomposition de n sous la forme $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \cdots + F_{k_p}$, avec $p \geq 0$ et $k_0 \gg k_1 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$. [S]
   (d) Former la décomposition de $n = 2002$. [S]
5. Dans cette question, on cherchera le rapport avec les nombres de Fibonacci.
   (a) De combien de façons différentes peut-on daller une allée $2 \times n$ avec des dalles 2×1 ? [S]
   (b) Épatez vos amis, brillez en société ! Vous distribuez dans l'assistance 8 cartes numérotées contenant chacune des entiers de 1 à 54.
   Carte n°1 : 1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 53
   Carte n°2 : 2, 7, 10, 15, 20, 23, 28, 31, 36, 41, 44, 49, 54
   Carte n°3 : 3, 4, 11, 12, 16, 17, 24, 25, 32, 33, 37, 38, 45, 46, 50, 51
   Carte n°4 : 5, 6, 7, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 39, 40, 41, 52, 53, 54
   Carte n°5 : 8, 9, 10, 11, 12, 29, 30, 31, 32, 33, 42, 43, 44, 45, 46
   Carte n°6 : 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54
   Carte n°7 : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33
   Carte n°8 : 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54
   Vous demandez à une personne de l'assistance de choisir un entier au hasard, de 1 à 54.
   Vous lui demandez ensuite sur quelles cartes apparaît le numéro qu'elle a choisi.
   Sous les applaudissements, vous devinez le numéro mystérieux. Comment faites-vous ? [S]
   (c) Deux joueurs participent au jeu suivant. Au départ, on dispose d'un tas de $n \geq 1$ haricots.
   Le premier en retire m ($1 \leq m < n$.) Le second en retire au moins un mais au plus $2m$.
   Plus généralement, chaque joueur doit retirer un nombre de haricots au moins égal à 1 et au plus égal au double du nombre de haricots que vient de retirer l'autre joueur.
   Le joueur qui retire le dernier haricot gagne la partie.
   Y-a-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? [S]

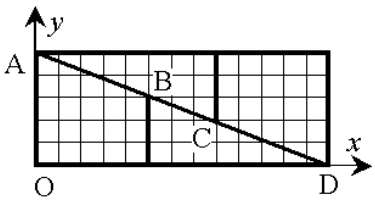
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Corrigé du problème

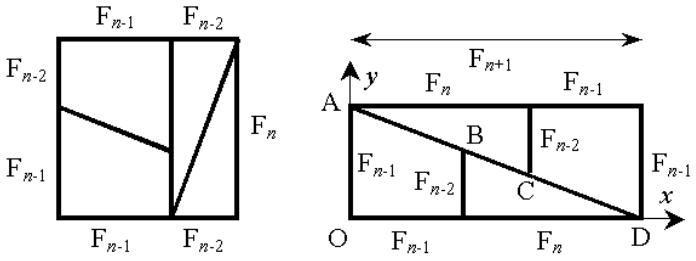
Première partie

1. Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$. Tout d'abord $u_1 = F_2F_0 - F_1^2 = -1$.
   Pour $n \geq 1$: $u_{n+1} = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1}+F_n)F_n - F_{n+1}(F_n+F_{n-1}) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de premier terme $u_1 = -1$ et de raison -1.
   Il en découle $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
   Pour tout $n \geq 1$, la relation précédente est une identité de Bezout entre F_{n-1} et F_n.
   Il en découle que F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux, pour tout $n \geq 1$. [Q]

2. On nomme les points O, A, B, C, D comme indiqué. On se place dans le repère O, x, y.

   On a les coordonnées $A(0,5)$, $B(5,3)$, $C(8,2)$ et $D(13,0)$.
   Le coefficient directeur de (AB) est égal à $-\frac{2}{5}$.
   Ceux de (AC) et (AD) valent respectivement $-\frac{3}{8}$ et $-\frac{5}{13}$
   Ces trois coefficients sont différents.
   Les droites (AB), (AC) et (AD) sont donc distinctes.
   Les coefficients des droites (AB), (AC) et (AD) valent $\beta = -\frac{208}{520}$, $\gamma = -\frac{195}{520}$ et $\delta = -\frac{200}{520}$.
   Puisque $\beta < \delta < \gamma$, le point B est en-dessous de la droite (AD) et C est au-dessus.
   On voit que les trois coefficients sont suffisamment proches pour expliquer l'illusion d'optique.
   On peut généraliser en partant d'un carré d'arête F_n :

   Avant découpe la surface est $S = F_n^2$. Après, elle vaut $F_{n-1}F_{n+1} = S + (-1)^n$.
   On a ici les coordonnées $A(0, F_{n-1})$, $B(F_{n-1}, F_{n-2})$, $C(F_n, F_{n-3})$ et $D(F_{n+1}, 0)$.
   Les pentes des droites (AB), (AC) et (AD) valent $\beta = -\dfrac{F_{n-3}}{F_{n-1}}$, $\gamma = -\dfrac{F_{n-2}}{F_n}$ et $\delta = -\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$.
   On trouve par exemple :

$$\begin{aligned}\delta - \beta &= \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-3}F_{n+1} - F_{n-1}^2}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{(F_{n-1}-F_{n-2})(F_n+F_{n-1}) - F_{n-1}^2}{F_{n-1}F_{n+1}} \\ &= \frac{F_{n-1}(F_n - F_{n-2}) - F_nF_{n-2}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_{n+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta - \gamma &= \frac{F_{n-2}}{F_n} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-2}F_{n+1} - F_nF_{n-1}}{F_nF_{n+1}} \\ &= \frac{(F_n - F_{n-1})F_{n+1} - F_n(F_{n+1} - F_n)}{F_nF_{n+1}} = \frac{F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}}{F_nF_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}\end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Ainsi $\beta < \delta < \gamma$ si n est pair, et $\beta > \delta > \gamma$ si n est impair.

Dans tous les cas, les points B et C sont de part et d'autre de la droite (AD). En tout cas B et C ne sont jamais alignés avec A et D. L'illusion d'optique est d'autant plus frappante que les différences entre les taux d'accroissement tendent rapidement vers 0 quand $n \to +\infty$. [Q]

3. On raisonne par récurrence de pas deux sur n, en fixant la valeur de m.

   La propriété est vraie si $n = 0$ car $F_{m+1}F_1 + F_mF_0 = F_{m+1}$.

   Elle est vraie si $n = 1$ car $F_{m+1}F_2 + F_mF_1 = F_{m+1} + F_m = F_{m+2}$.

   Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$.

   Cela signifie que pour tout m de $\mathbb{N}$, $\begin{cases} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n = F_{n+m+1} \\ F_{m+1}F_{n+2} + F_mF_{n+1} = F_{n+m+2} \end{cases}$

   En additionnant, on trouve : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ F_{m+1}(F_{n+1}+F_{n+2})+F_m(F_n+F_{n+1}) = F_{n+m+1}+F_{n+m+2}$

   C'est-à-dire : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ F_{m+1}F_{n+3}+F_mF_{n+2} = F_{n+m+3}$ ce qui prouve la propriété au rang $n+2$.

   Ceci achève la récurrence : $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n = F_{n+m+1}$. [Q]

4. On remarque que la propriété est évidente si $n = 0$.

   On fixe n (quelconque dans $\mathbb{N}^*$) et on procède par récurrence sur q.

   La propriété est vraie de façon évidente si $q = 0$ et $q = 1$.

   On se donne donc un entier $q \geq 1$ et on suppose qu'il existe un entier k tel que $F_{qn} = kF_n$.

   Dans le résultat de la question précédente, on choisit $m = nq - 1$ (il est dans $\mathbb{N}$.)

   On trouve $F_{(q+1)n} = F_{qn}F_{n+1} + F_{qn-1}F_n = (kF_{n+1} + F_{qn-1})F_n$ qui est un multiple de F_n.

   Ceci achève la récurrence. Ainsi, pour tout (q,n) de $\mathbb{N}^2$, F_{qn} est multiple de F_n. [Q]

5. Dans le résultat de la question (3), on remplace n par $n - m - 1$.

   On obtient $F_{m+1}F_{n-m} + F_mF_{n-m-1} = F_n$.

   Puisque d divise F_m et F_n, il divise $F_{m+1}F_{n-m} = F_n - F_{n-m}F_m$.

   On sait depuis (1) que $F_m \wedge F_{m+1} = 1$. Or d divise F_m. Il en découle $d \wedge F_{m+1} = 1$.

   Ainsi d divise $F_{m+1}F_{n-m}$ et $d \wedge F_{m+1} = 1$. Le théorème de Gauss implique $d \mid F_{n-m}$. [Q]

6. Puisque $m \wedge n$ divise m et n, il en découle que $F_{m\wedge n}$ divise F_m et F_n (cf question 4.)

   Autrement dit, $F_{m\wedge n}$ divise le pgcd de F_m et de F_n.

   Réciproquement, on va montrer que si $p \mid F_m$ et $p \mid F_n$ alors $p \mid F_{m\wedge n}$.

   Le résultat est évident si $m = 0$ ou $n = 0$. On va donc supposer $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

   On va raisonner par récurrence forte sur la valeur de la somme $s = m + n$.

   Si $s = 2$, c'est-à-dire si $m = n = 1$ le résultat est évident car alors $F_m = F_n = F_{m\wedge n} = F_1 = 1$.

   On se donne maintenant m, n dans $\mathbb{N}^*$, de somme $s = m + n \geq 3$.

   On suppose que la propriété est vraie pour tous les m', n' de $\mathbb{N}^*$ tels que $s' = m' + n' < s$.

   Si $m = n$, l'implication $(p \mid F_m,\ p \mid F_n) \Rightarrow p \mid F_{m\wedge n}$ est évidente.

   On peut donc supposer par exemple $1 \leq m < n$.

   Puisque p divise F_m et F_m, il divise F_{n-m} (cf question 5.)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.