Questions d'irrationnalité

On notera $\mathcal{I}$ l'ensemble des nombres réels qui sont irrationnels.

1. (a) Soit $A(t) = t^m - c_{m-1}t^{m-1} - \cdots - c_1 t - c_0$, avec $(c_0, \ldots, c_{m-1})$ dans $\mathbb{Z}^m$ et m dans $\mathbb{N}^*$.
   Soit t une racine réelle de A. Montrer que t est ou bien dans $\mathbb{Z}$ ou bien dans $\mathcal{I}$. [S]

   (b) Soit (n, m) dans $\mathbb{N}^2$, avec $m \geq 2$. Montrer que $\sqrt[m]{n}$ est dans $\mathbb{N}$, sinon dans $\mathcal{I}$. [S]

   (c) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ puis $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont dans $\mathcal{I}$. [S]

2. Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme $A_n(t) = \dfrac{t^n(1-t)^n}{n!}$.

   (a) Montrer que pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$, on a l'encadrement : $0 \leq A_n(t) \leq \dfrac{1}{4^n n!}$. [S]

   (b) Montrer que pout tout m de $\mathbb{N}$, $A_n^{(m)}(0)$ est dans $\mathbb{Z}$. [S]

   (c) En remarquant que $A_n(t) = A_n(1-t)$, montrer qu'il en est de même pour $A_n^{(m)}(1)$. [S]

3. Soit p un entier strictement positif. On va montrer que e^p est un irrationnel.
   Par l'absurde, on pose $\mathrm{e}^p = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\varphi_n(t) = b\mathrm{e}^{pt} \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k p^{2n-k} A_n^{(k)}(t)$.

   (a) Vérifier que $\varphi_n(0)$ et $\varphi_n(1)$ sont des entiers relatifs. [S]

   (b) Montrer que $\varphi'_n(t) = b\mathrm{e}^{pt} p^{2n+1} A_n(t)$. [S]

   (c) En déduire l'égalité : $\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = b\, p^{2n+1} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{pt} A_n(t)\, \mathrm{d}t$ [S]

   (d) Majorer $|\varphi_n(1) - \varphi_n(0)|$ en utilisant (2a).
   Aboutir à une contradiction si on choisit n assez grand. Conclusion ? [S]

4. On généralise ici les résultats de la question précédente.

   (a) Montrer que si r est dans $\mathbb{Q}^*$, alors e^r est dans $\mathcal{I}$. [S]

   (b) En déduire que pour tout r de $\mathbb{Q}^{+*}$ (avec $r \neq 1$) le réel $\ln r$ est irrrationnel. [S]

5. Dans cette question, on va montrer que π^2 est irrationnel (il en découle que π est irrationnel.)
   Par l'absurde, on pose $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\psi_n(t) = b^n \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} A_n^{(2k)}(t)$.

   (a) Vérifier que $\psi_n(0), \psi_n(1)$ sont entiers. [S]

   (b) On pose $\xi(t) = \psi'_n(t) \sin \pi t - \pi \psi_n(t) \cos \pi t$. Montrer que $\xi'(t) = \pi^2 a^n A_n(t) \sin \pi t$. [S]

   (c) En déduire que $\psi_n(0) + \psi_n(1) = \pi a^n \displaystyle\int_0^1 A_n(t) \sin \pi t\, \mathrm{d}t$. [S]

   (d) Majorer $|\psi_n(1) + \psi_n(0)|$ et aboutir à une contradiction. Conclusion ? [S]

6. On établit ici que le seul rationnel r de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos \pi r$ soit rationnel est $r = \frac{1}{3}$.

   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme T_n de degré n, à coefficients entiers (de coefficient dominant 2^{n-1}) tel que $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$. [S]

   (b) On pose $r = \dfrac{m}{n}$, et on suppose que $\cos \pi r = \dfrac{p}{q}$, avec $\begin{cases} m \in \mathbb{N}^*, n \geq 2,\ m \wedge n = 1 \\ p, q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1 \end{cases}$
   En considérant $\cos n\theta$ avec $\theta = \pi r$ montrer : $\exists\, k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $q = 2^m$, et que p est impair. [S]

   (c) Par l'absurde, on suppose que l'entier k est strictement supérieur à 1.
   Appliquer ce qui précède à l'angle $\theta_1 = 2\theta$ et prouver que $k < k_1 < n$, avec $k_1 = 2k - 1$.
   Rien n'empêche alors de considérer les angles $\theta_2 = 2\theta_1$, $\theta_3 = 2\theta_2$, etc.
   Conclure à une absurdité, et en déduire que $\cos \pi r = \dfrac{1}{2}$, donc que $r = \dfrac{1}{3}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

1. (a) On suppose que t soit une racine rationnelle de A.

   Il existe donc a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}^*$, avec $a \wedge b = 1$ tels que $t = \frac{a}{b}$.

   L'égalité $A(t) = 0$ s'écrit $\frac{a^m}{b^m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k \frac{a^k}{b^k}$ ou encore $a^m = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k a^k b^{m-k}$.

   Cette égalité s'écrit $a^m = br$, en posant $r = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k a^k b^{m-k-1}$.

   Puisque r est un entier, il en découle que b divise a^m.

   Mais b étant premier avec a (donc avec a^m) cela n'est possible que si $b = 1$.

   Ainsi $t = a$ est dans $\mathbb{Z}$: les seules racines possibles de $A(t)$ dans $\mathcal{I}$ sont des entiers.

   Conclusion : une racine réelle de A est soit entière, soit irrationnelle. [Q]

   (b) Le réel $\sqrt[m]{n}$ est racine du polynôme $A(t) = t^m - n$ (unitaire à coefficients entiers...)

   On est donc dans les conditions d'application de la question précédente.

   Si n n'est pas la puissance m-ième d'un entier (si $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{N}$) on en déduit que $\sqrt[m]{n}$ est dans $\mathcal{I}$. [Q]

   (c) Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. On a $(x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$.

   On en déduit $x^2 - 1 = 2\sqrt{2}x$ puis $(x^2 - 1)^2 = 8x^2$ donc $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

   $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est non entier $(3 < x < 4)$ et racine de $A(t) = t^4 - 10t^2 + 1$.

   On peut donc appliquer le résultat de la question (a) : le réel x est un irrationnel.

   Posons $y = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = x + \sqrt{5}$.

   En utilisant ce qui précède, on peut écrire :

   $0 = x^4 - 10x^2 + 1 = (y - \sqrt{5})^4 - 10(y - \sqrt{5})^2 + 1 = y^4 - 4\sqrt{5}y^3 + 20y^2 - 24$.

   Ainsi $(y^4 + 20y^2 - 24)^2 = 80y^6$, donc $B(y) = 0$, avec $B(t) = (t^4 + 20t^2 - 24)^2 - 80t^6$.

   Le polynôme B est unitaire à coefficients entiers.

   Comme y n'est pas entier $(5 < y < 6)$, on en déduit que y est irrationnel. [Q]

2. (a) On sait que $0 \le t(1-t) \le \dfrac{1}{4}$ sur $]0, 1[$. Le résultat en découle immédiatement. [Q]

   (b) A_n est un polynôme de degré $2n$.

   On développe $A_n(t)$ et on trouve : $A_n(t) = \dfrac{t^n}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k t^k = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k t^{n+k}$

   – La dérivée m-ième de t^{n+k} est nulle si $m > n + k$.

   – Elle vaut $\dfrac{(n+k)!\, t^{n+k-m}}{(n+k-m)!}$ si $m \le n + k$.

     Dans ce cas sa valeur en zéro est nulle si $m < n + k$ et vaut $m!$ si $m = n + k$.

   On en déduit que la valeur en 0 de la dérivée m-ième de A_n est nulle (donc est élément de $\mathbb{Z}$) sauf s'il existe un entier k de $\{0, \ldots, n\}$ tel que $m = n + k$, c'est-à-dire sauf si m appartient à $\{n, \ldots, 2n\}$.

   Dans ce cas, la dérivée en 0 du polynôme A_n est égale à celle de son terme de degré $n + k = m$, c'est-à-dire celle du monôme $\dfrac{(-1)^{m-n}}{n!} \mathrm{C}_n^{m-n}\, t^m$.

   Donc si $n \le m \le 2n$, : $P_n^{(m)}(0) = (-1)^{m-n} \dfrac{m!}{n!} \mathrm{C}_n^{m-n}$, qui est dans $\mathbb{Z}$.

   Dans tous les cas, $P_n^{(m)}(0)$ est donc un entier relatif. [Q]

   (c) Pour tout réel t, on a $A_n(t) = A_n(1-t)$, et par dérivation : $P_n'(t) = -P_n'(1-t)$.

   Un récurrence évidente donne alors : $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A_n^{(m)}(t) = (-1)^m A_n(t)$.

   En particulier : $\forall m \in \mathbb{N},\ P^{(m)}(1) = (-1)^n P^{(m)}(0)$ est élément de $\mathbb{Z}$. [Q]

©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.