Questions d'irrationnalité

On notera $\mathcal{I}$ l'ensemble des nombres réels qui sont irrationnels.

1. (a) Soit $A(t) = t^m - c_{m-1}t^{m-1} - \cdots - c_1 t - c_0$, avec $(c_0, \ldots, c_{m-1})$ dans $\mathbb{Z}^m$ et m dans $\mathbb{N}^*$. Soit t une racine réelle de A. Montrer que t est ou bien dans $\mathbb{Z}$ ou bien dans $\mathcal{I}$. [S]

   (b) Soit (n, m) dans $\mathbb{N}^2$, avec $m \geq 2$. Montrer que $\sqrt[m]{n}$ est dans $\mathbb{N}$, sinon dans $\mathcal{I}$. [S]

   (c) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ puis $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont dans $\mathcal{I}$. [S]

2. Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme $A_n(t) = \dfrac{t^n(1-t)^n}{n!}$.

   (a) Montrer que pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$, on a l'encadrement : $0 \leq A_n(t) \leq \dfrac{1}{4^n n!}$. [S]

   (b) Montrer que pout tout m de $\mathbb{N}$, $A_n^{(m)}(0)$ est dans $\mathbb{Z}$. [S]

   (c) En remarquant que $A_n(t) = A_n(1-t)$, montrer qu'il en est de même pour $A_n^{(m)}(1)$. [S]

3. Soit p un entier strictement positif. On va montrer que e^p est un irrationnel.
   Par l'absurde, on pose $\mathrm{e}^p = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\varphi_n(t) = b\mathrm{e}^{pt} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k p^{2n-k} A_n^{(k)}(t)$.

   (a) Vérifier que $\varphi_n(0)$ et $\varphi_n(1)$ sont des entiers relatifs. [S]

   (b) Montrer que $\varphi_n'(t) = b\mathrm{e}^{pt} p^{2n+1} A_n(t)$. [S]

   (c) En déduire l'égalité : $\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = b\,p^{2n+1} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{pt} A_n(t)\,\mathrm{d}t$ [S]

   (d) Majorer $|\varphi_n(1) - \varphi_n(0)|$ en utilisant (2a).
   Aboutir à une contradiction si on choisit n assez grand. Conclusion ? [S]

4. On généralise ici les résultats de la question précédente.

   (a) Montrer que si r est dans $\mathbb{Q}^*$, alors e^r est dans $\mathcal{I}$. [S]

   (b) En déduire que pour tout r de $\mathbb{Q}^{+*}$ (avec $r \neq 1$) le réel $\ln r$ est irrrationnel. [S]

5. Dans cette question, on va montrer que π^2 est irrationnel (il en découle que π est irrationnel.)
   Par l'absurde, on pose $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\psi_n(t) = b^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} A_n^{(2k)}(t)$.

   (a) Vérifier que $\psi_n(0), \psi_n(1)$ sont entiers. [S]

   (b) On pose $\xi(t) = \psi_n'(t) \sin \pi t - \pi \psi_n(t) \cos \pi t$. Montrer que $\xi'(t) = \pi^2 a^n A_n(t) \sin \pi t$. [S]

   (c) En déduire que $\psi_n(0) + \psi_n(1) = \pi a^n \displaystyle\int_0^1 A_n(t) \sin \pi t\,\mathrm{d}t$. [S]

   (d) Majorer $|\psi_n(1) + \psi_n(0)|$ et aboutir à une contradiction. Conclusion ? [S]

6. On établit ici que le seul rationnel r de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos \pi r$ soit rationnel est $r = \frac{1}{3}$.

   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme T_n de degré n, à coefficients entiers (de coefficient dominant 2^{n-1}) tel que $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$. [S]

   (b) On pose $r = \dfrac{m}{n}$, et on suppose que $\cos \pi r = \dfrac{p}{q}$, avec $\begin{cases} m \in \mathbb{N}^*, n \geq 2,\ m \wedge n = 1 \\ p, q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1 \end{cases}$
   En considérant $\cos n\theta$ avec $\theta = \pi r$ montrer : $\exists\, k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $q = 2^m$, et que p est impair. [S]

   (c) Par l'absurde, on suppose que l'entier k est strictement supérieur à 1.
   Appliquer ce qui précède à l'angle $\theta_1 = 2\theta$ et prouver que $k < k_1 < n$, avec $k_1 = 2k - 1$.
   Rien n'empêche alors de considérer les angles $\theta_2 = 2\theta_1$, $\theta_3 = 2\theta_2$, etc.
   Conclure à une absurdité, et en déduire que $\cos \pi r = \dfrac{1}{2}$, donc que $r = \dfrac{1}{3}$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) On suppose que t soit une racine rationnelle de A.

   Il existe donc a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}^*$, avec $a \wedge b = 1$ tels que $t = \frac{a}{b}$.

   L'égalité $A(t) = 0$ s'écrit $\frac{a^m}{b^m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k \frac{a^k}{b^k}$ ou encore $a^m = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k a^k b^{m-k}$.

   Cette égalité s'écrit $a^m = br$, en posant $r = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k a^k b^{m-k-1}$.

   Puisque r est un entier, il en découle que b divise a^m.

   Mais b étant premier avec a (donc avec a^m) cela n'est possible que si $b = 1$.

   Ainsi $t = a$ est dans $\mathbb{Z}$: les seules racines possibles de $A(t)$ dans $\mathcal{I}$ sont des entiers.

   Conclusion : une racine réelle de A est soit entière, soit irrationnelle. [Q]

   (b) Le réel $\sqrt[m]{n}$ est racine du polynôme $A(t) = t^m - n$ (unitaire à coefficients entiers...)

   On est donc dans les conditions d'application de la question précédente.

   Si n n'est pas la puissance m-ième d'un entier (si $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{N}$) on en déduit que $\sqrt[m]{n}$ est dans $\mathcal{I}$. [Q]

   (c) Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. On a $(x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$.

   On en déduit $x^2 - 1 = 2\sqrt{2}x$ puis $(x^2 - 1)^2 = 8x^2$ donc $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

   $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est non entier $(3 < x < 4)$ et racine de $A(t) = t^4 - 10t^2 + 1$.

   On peut donc appliquer le résultat de la question (a) : le réel x est un irrationnel.

   Posons $y = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = x + \sqrt{5}$.

   En utilisant ce qui précède, on peut écrire :

   $0 = x^4 - 10x^2 + 1 = (y - \sqrt{5})^4 - 10(y - \sqrt{5})^2 + 1 = y^4 - 4\sqrt{5}y^3 + 20y^2 - 24$.

   Ainsi $(y^4 + 20y^2 - 24)^2 = 80y^6$, donc $B(y) = 0$, avec $B(t) = (t^4 + 20t^2 - 24)^2 - 80t^6$.

   Le polynôme B est unitaire à coefficients entiers.

   Comme y n'est pas entier $(5 < y < 6)$, on en déduit que y est irrationnel. [Q]

2. (a) On sait que $0 \leq t(1-t) \leq \dfrac{1}{4}$ sur $]0, 1[$. Le résultat en découle immédiatement. [Q]

   (b) A_n est un polynôme de degré $2n$.

   On développe $A_n(t)$ et on trouve : $A_n(t) = \dfrac{t^n}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k t^k = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k t^{n+k}$

   – La dérivée m-ième de t^{n+k} est nulle si $m > n + k$.

   – Elle vaut $\dfrac{(n+k)!\, t^{n+k-m}}{(n+k-m)!}$ si $m \leq n + k$.

     Dans ce cas sa valeur en zéro est nulle si $m < n + k$ et vaut $m!$ si $m = n + k$.

   On en déduit que la valeur en 0 de la dérivée m-ième de A_n est nulle (donc est élément de $\mathbb{Z}$) sauf s'il existe un entier k de $\{0, \ldots, n\}$ tel que $m = n + k$, c'est-à-dire sauf si m appartient à $\{n, \ldots, 2n\}$.

   Dans ce cas, la dérivée en 0 du polynôme A_n est égale à celle de son terme de degré $n + k = m$, c'est-à-dire celle du monôme $\dfrac{(-1)^{m-n}}{n!} \mathrm{C}_n^{m-n} t^m$.

   Donc si $n \leq m \leq 2n$, : $P_n^{(m)}(0) = (-1)^{m-n} \dfrac{m!}{n!} \mathrm{C}_n^{m-n}$, qui est dans $\mathbb{Z}$.

   Dans tous les cas, $P_n^{(m)}(0)$ est donc un entier relatif. [Q]

   (c) Pour tout réel t, on a $A_n(t) = A_n(1-t)$, et par dérivation : $P_n'(t) = -P_n'(1-t)$.

   Un récurrence évidente donne alors : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $A_n^{(m)}(t) = (-1)^m A_n(t)$.

   En particulier : $\forall m \in \mathbb{N}$, $P^{(m)}(1) = (-1)^n P^{(m)}(0)$ est élément de $\mathbb{Z}$. [Q]