

## Une intégrale dépendant d'un paramètre

Dans ce problème, on étudie l'intégrale  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ , où  $\alpha$  est un réel.

### Première partie

1. Montrer que l'application  $F$  est définie et positive sur  $I = ]1, +\infty[$ . [S]

2. Calculer  $F(2)$ ,  $F(3)$ ,  $F(\frac{3}{2})$ . [S]

3. Pour tout  $\alpha$  de  $I$ , montrer que  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha} dt$ . [S]

4. Montrer que l'application  $\alpha \rightarrow F(\alpha)$  est convexe sur  $I$ .

Indication : pour  $t$  fixé dans  $]0, 1]$ , considérer l'application  $h_t : \alpha \mapsto \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$ . [S]

### Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne deux entiers  $n$  et  $p$  strictement positifs, avec  $p < 2n$ .

Pour tout entier  $k$  de  $\{1, \dots, 2n\}$ , on note  $\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi$ .

1. Pour tout réel  $\theta$  de  $]0, \pi[$ , calculer les sommes suivantes :

$$C_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\theta, S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)\theta \text{ et } D_n(\theta) = \sum_{k=1}^n (2k-1) \sin(2k-1)\theta. \text{ [S]}$$

2. Montrer que la fraction rationnelle  $R(x) = \frac{p x^{p-1}}{x^{2n} + 1}$  se décompose en  $R(x) = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n R_k(x)$ , avec  $R_k(x) = \frac{a_k x + b_k}{x^2 - 2x \cos \theta_k + 1}$ . Déterminer  $a_k, b_k$  et prouver l'égalité  $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ . [S]

3. Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , soit  $S_k$  la primitive de  $R_k$  qui s'annule en 0. Montrer que :

$$S_k(x) = \frac{a_k}{2} \ln(x^2 - 2x \cos \theta_k + 1) + \sin(p \theta_k) \arctan\left(\frac{x - \cos \theta_k}{\sin \theta_k}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_k\right) \sin(p \theta_k). \text{ [S]}$$

4. Montrer que si  $\alpha = \frac{2n}{p}$ , alors  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} R(t) dt$ . En déduire  $F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}$ . [S]

5. On suppose que  $\alpha$  est quelconque dans  $I$ . Montrer que  $F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}$ . [S]

## Corrigé du problème

### Première partie

1. Pour tout réel  $\alpha$ , l'application  $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  est définie continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Elle est continue en 0 si  $\alpha \geq 0$  et prolongeable par continuité par  $f_\alpha(0) = 0$  si  $\alpha < 0$ .

Si  $\alpha \geq 0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_\alpha(t) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$  donc  $f_\alpha$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $\alpha > 0$ , on a  $f_\alpha(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

On en déduit (comparaison avec les intégrales de Riemann) que  $f_\alpha$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  si  $\alpha > 1$ , et non intégrable sinon.

Autrement dit, l'application  $\alpha \mapsto F(\alpha)$  est définie sur  $I = ]1, +\infty[$ .

Puisque  $f_\alpha$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}^+$ , il en est de même de  $F(\alpha)$  pour  $\alpha > 1$ . [Q]

2. On a  $F(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[ \arctan t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ .

Pour calculer  $F(3)$ , on note que  $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$ .

On multiplie la décomposition par  $t+1$  et on donne à  $t$  la valeur  $-1$ . On trouve  $a = \frac{1}{3}$ .

On donne à  $t$  la valeur 0 et on obtient  $a+c=1$ .

On multiplie la décomposition par  $t$  et on fait tendre  $t$  vers  $+\infty$ . On trouve  $a+b=0$ .

Ainsi  $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right) = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{2t-1}{6(t^2-t+1)} + \frac{1}{2(t^2-t+1)}$ .

Une primitive de  $\frac{1}{t^2-t+1} = \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$  est  $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)$

Une primitive de  $\frac{1}{1+t^3}$  est donc  $g_3(t) = \frac{1}{3} \ln(t+1) - \frac{1}{6} \ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$ .

Ainsi  $g_3(t) = \frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$ .

On trouve  $g_3(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_3(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ .

Finalement, on obtient :  $F(3) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_3(x) - g_3(0) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ .

Pour calculer  $F\left(\frac{3}{2}\right)$ , on commence par effectuer le changement de variable  $u = \sqrt{t}$ .

On trouve  $F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{3/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2u du}{1+u^3}$ .

On constate que  $F\left(\frac{3}{2}\right) + 2F(3) = \int_0^{+\infty} \frac{2(1+u) du}{1+u^3} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-u+1}$ .

Ainsi  $F\left(\frac{3}{2}\right) + 2F(3) = \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{8\pi\sqrt{3}}{9}$ .

Puisque  $F(3) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ , il en découle  $F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ . [Q]