Une intégrale dépendant d'un paramètre

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, où α est un réel.

Première partie

1. Montrer que l'application F est définie et positive sur $I = \,]\,1, +\infty\,[$. [S]
2. Calculer $F(2)$, $F(3)$, $F(\frac{3}{2})$. [S]
3. Pour tout α de I, montrer que $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. [S]
4. Montrer que l'application $\alpha \to F(\alpha)$ est convexe sur I.
   Indication : pour t fixé dans $]0,1]$, considérer l'application $h_t : \alpha \mapsto \dfrac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne deux entiers n et p strictement positifs, avec $p < 2n$.

Pour tout entier k de $\{1, \ldots, 2n\}$, on note $\theta_k = \dfrac{2k-1}{2n}\,\pi$.

1. Pour tout réel θ de $]\,0, \pi\,[$, calculer les sommes suivantes :
   $C_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta$, $S_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta$ et $D_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)\sin(2k-1)\theta$. [S]
2. Montrer que la fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{p\,x^{p-1}}{x^{2n}+1}$ se décompose en $R(x) = \dfrac{p}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} R_k(x)$, avec $R_k(x) = \dfrac{a_k x + b_k}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1}$. Déterminer a_k, b_k et prouver l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$. [S]
3. Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, soit S_k la primitive de R_k qui s'annule en 0. Montrer que :
   $S_k(x) = \dfrac{a_k}{2}\ln\Big(x^2 - 2x\cos\theta_k + 1\Big) + \sin(p\,\theta_k)\arctan\Big(\dfrac{x-\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\Big) + \Big(\dfrac{\pi}{2} - \theta_k\Big)\sin(p\,\theta_k)$. [S]
4. Montrer que si $\alpha = \dfrac{2n}{p}$, alors $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire $F(\alpha) = \dfrac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$. [S]
5. On suppose que α est quelconque dans I. Montrer que $F(\alpha) = \dfrac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. Pour tout réel α, l'application $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est définie continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Elle est continue en 0 si $\alpha \geq 0$ et prolongeable par continuité par $f_\alpha(0) = 0$ si $\alpha < 0$.

   Si $\alpha \geq 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_\alpha(t) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ donc f_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Si $\alpha > 0$, on a $f_\alpha(t) \sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ quand t tend vers $+\infty$.

   On en déduit (comparaison avec les intégrales de Riemann) que f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha > 1$, et non intégrable sinon.

   Autrement dit, l'application $\alpha \mapsto F(\alpha)$ est définie sur $I =]\,1, +\infty\,[$.

   Puisque f_α est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, il en est de même de $F(\alpha)$ pour $\alpha > 1$. [Q]

2. On a $F(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

   Pour calculer $F(3)$, on note que $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$.

   On multiplie la décomposition par $t+1$ et on donne à t la valeur -1. On trouve $a = \dfrac{1}{3}$.

   On donne à t la valeur 0 et on obtient $a + c = 1$.

   On multiplie la décomposition par t et on fait tendre t vers $+\infty$. On trouve $a + b = 0$.

   Ainsi $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{t+1} - \dfrac{t-2}{t^2-t+1}\Big) = \dfrac{1}{3(t+1)} - \dfrac{2t-1}{6(t^2-t+1)} + \dfrac{1}{2(t^2-t+1)}$.

   Une primitive de $\dfrac{1}{t^2-t+1} = \dfrac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ est $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(t - \dfrac{1}{2}\Big)$

   Une primitive de $\dfrac{1}{1+t^3}$ est donc $g_3(t) = \dfrac{1}{3}\ln(t+1) - \dfrac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$.

   Ainsi $g_3(t) = \dfrac{1}{6} \ln \dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$.

   On trouve $g_3(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

   Finalement, on obtient : $F(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \lim_{x\to+\infty} g_3(x) - g_3(0) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

   Pour calculer $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big)$, on commence par effectuer le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

   On trouve $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{3/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$.

   On constate que $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) + 2F(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2(1+u)\,\mathrm{d}u}{1+u^3} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}$.

   Ainsi $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) + 2F(3) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\Big[\arctan \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(\pi + \dfrac{\pi}{3}\Big) = \dfrac{8\pi\sqrt{3}}{9}$.

   Puisque $F(3) = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$, il en découle $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$. [Q]