Étude et calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$

I. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Dans cette partie, on note φ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. (a) Montrer que $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$ pour tout k de $\mathbb{N}$. [S]

   (b) En déduire que φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (on rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$.) [S]

2. (a) Montrer que l'application $\psi : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [S]

   (b) Pour tout $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^{a}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = a\,\psi(a) + \int_0^{a}\psi(x)\,\mathrm{d}x$. [S]

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$.

   Cette limite est encore notée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ bien que φ soit non intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [S]

II. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, avec $a < b$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^{b} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$. [S]

2. Soit f l'application définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$.

   Montrer que f se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Dans la suite de cette partie, ce prolongement sera encore noté f. [S]

3. Pour tout entier naturel, calculer $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. [S]

4. On pose $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}K_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. [S]

5. Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. [S]

III. Calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que si $|u|\le\alpha$, alors $|\,\mathrm{e}^u-1-u|\le\dfrac{u^2}{2}\,\mathrm{e}^\alpha$. [S]
2. Soit φ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Pour tout (k,t) de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^{+*}$, montrer que $x\mapsto x^k\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout $t>0$, on pose $Y(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$ et $Z(t)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$. [S]
   (b) On se donne $a>0$ et h tel que $|h|\le\frac{1}{2}\,a$.
   Montrer que $|Y(a+h)-Y(a)-hZ(a)|\le\frac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2\,|\varphi(x)|\,\mathrm{e}^{-ax/2}\,\mathrm{d}x$. [S]
   (c) En déduire que Y est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $Y'=Z$. [S]
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}Y(t)=0$. [S]
3. On reprend les notations précédentes avec l'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{\sin x}{x}$.
   (a) Vérifier rapidement que cette application φ est bien continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. [S]
   (b) Calculer $Z(t)$, pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$. [S]
   (c) En déduire que pour tout t strictement positif : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\arctan t$. [S]
   (d) Interpréter alors le résultat obtenu en (II.5) [S]

IV. Étude des intégrales $L_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^n\,\mathrm{d}x$

Dans cette partie, on note toujours φ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que φ^n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $n\ge 2$.
   Dans la suite de ce problème, on se propose d'étudier les intégrales $L_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi^n(x)\,\mathrm{d}x$
   Montrer que $L_{2n}>0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]
2. Dans cette question, on fixe n dans $\mathbb{N}^*$, et on va montrer que $L_{2n+1}>0$.
   On pose $u_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\varphi^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout k de $\mathbb{N}$.
   (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, montrer que $u_k=(-1)^k\displaystyle\int_0^{\pi}\Big(\frac{\sin t}{t+k\pi}\Big)^{2n+1}\mathrm{d}t$. [S]
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}$, prouver que $u_{2k}+u_{2k+1}>0$. [S]
   (c) En considérant $W_m=\displaystyle\int_0^{2m\pi}\varphi(x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$ (avec $m\in\mathbb{N}^*$) prouver que $L_{2n+1}>0$. [S]

3. Dans cette question, on va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.
   (a) Montrer que φ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. [S]
   (b) On se donne $n \geq 2$, et a dans $]0,\pi[$. Montrer que $0 < L_n < a + \pi\varphi^n(a) + \dfrac{1}{(n-1)\pi^{n-1}}$.
   Indication : $\mathbb{R}^+ = [0,a] \cup [a,\pi] \cup [\pi+\infty[$. [S]
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$. [S]

V. Calcul des intégrales $L_n = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$

Dans cette partie, $n \geq 2$ est fixé. On note f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin^n(x)$.

1. (a) Établir que $\forall\, k \in \{0,\ldots,n-1\},\ f_n^{(k)}(x) = \mathrm{o}(x^{n-1-k})$ au voisinage de 0.
   Indication : développements limités en 0 obtenus par Taylor-Young. [S]
   (b) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, l'application $f_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. [S]
2. Soit g une application de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$, avec $0 < a < b$. Montrer que :
$$\int_a^b f_n(x)g^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k f_n^{(k)}(x)g^{(n-2-k)}(x)\Big]_a^b + (-1)^{n-1}\int_a^b f_n^{(n-1)}(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$ [S]
3. On pose $g(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que le résultat précédent s'écrit :
$$\int_a^b \varphi^n(x)\,\mathrm{d}x = -\Big[\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2-k)!}{(n-1)!}\,\frac{f_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}}\Big]_a^b + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$ [S]
4. Déduire de ce qui précède que $L_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{b\to+\infty}\displaystyle\int_0^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. [S]
5. Après avoir linéarisé de $f_n(x)$, montrer que :
   – Pour tout entier $n \geq 1$: $f_{2n}^{(2n-1)}(x) = \sum\limits_{q=1}^{n} \mathrm{C}_{2n}^{n-q}\,(-1)^{n-q}\,q^{2n-1}\sin(2qx)$.
   – Pour tout $n \geq 1$: $f_{2n+1}^{(2n)}(x) = \sum\limits_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{n-q}\,(-1)^{n-q}(q+\frac{1}{2})^{2n}\sin(2q+1)x$. [S]
6. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$L_{2n} = \frac{n\pi}{(2n)!}\sum_{q=1}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{n-q}\,(-1)^{n-q}\,q^{2n-1} \text{ et } L_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n)!}\sum_{q=0}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{n-q}\,(-1)^{n-q}(q+\tfrac{1}{2})^{2n}.$$
   Préciser notamment les valeurs de L_k, pour $2 \leq k \leq 7$. [S]

Corrigé du problème

I. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

1. (a) On effectue le changement de variable $t = x - k\pi$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{k\pi+t}\,dt \geq \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(k+1)\pi}\,dt,\ \text{quantité égale à } \frac{2}{(k+1)\pi}.\ [Q]$$

(b) Si φ était intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on aurait $\displaystyle\int_J|\varphi| \leq \int_{\mathbb{R}^+}|\varphi|$ pour tout segment J de $\mathbb{R}^+$.

Or pour tout m de $\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_0^{m\pi}|\varphi(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\varphi(x)|\,dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m\pi}|\varphi(x)|\,dx = +\infty$. L'application φ n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [Q]

2. (a) Une fois prolongée en 0 par $\psi(0) = \frac{1}{2}$, l'application ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

D'autre part $|\psi(x)| \leq \dfrac{2}{x^2}$, ce qui prouve l'intégrabilité de ψ sur $[1, +\infty[$.

Compte tenu de sa continuité sur $[0, 1]$, l'application ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [Q]

(b) On intègre par partie sur $[0, a]$ (une primitive de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto 1 - \cos x$.)

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_0^a\frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^a + \int_0^a\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1-\cos a}{a} + \int_0^a\psi(x)\,dx.$$

Le calcul précédent est justifié par la continuité de ψ en 0 et par $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$.

On a bien obtenu : $\displaystyle\int_0^a\varphi(x)\,dx = a\psi(a) + \int_0^a\psi(x)\,dx$, pour tout $a > 0$. [Q]

(c) L'application ψ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\psi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\psi(x)\,dx$.

D'autre part $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} a\,\psi(a) = 0$.

Le résultat de la question (b) donne donc : $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\psi(x)\,dx$.

On pose donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\psi(x)\,dx$ bien que φ soit non intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On rappelle que l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de f continue équivaut à celle de $|f|$, qui équivaut à l'existence d'une limite finie pour $\displaystyle\int_0^a|f(x)|\,dx$ quand $a \to +\infty$.

Ici l'application φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a|\varphi(x)|\,dx = +\infty$.

Pourtant, on a constaté que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\varphi(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cela tient bien sûr aux changements de signe de l'application φ sur $\mathbb{R}^+$, qui induisent des “compensations” d'aire, compensations qui ne se produisent pas pour $|\varphi|$. [Q]