



## Étude et calcul des intégrales $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$

### I. Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ .

Dans cette partie, on note  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

- (a) Montrer que  $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\varphi(x)| dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ . [S]  
(b) En déduire que  $\varphi$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  (on rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ .) [S]
- (a) Montrer que l'application  $\psi : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . [S]  
(b) Pour tout  $a > 0$ , montrer que  $\int_0^a \varphi(x) dx = a\psi(a) + \int_0^a \psi(x) dx$ . [S]  
(c) En déduire que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

Cette limite est encore notée  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  bien que  $\varphi$  soit non intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . [S]

### II. Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

- Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b]$ , avec  $a < b$ .  
Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0$ . [S]
- Soit  $f$  l'application définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  par  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ .  
Montrer que  $f$  se prolonge en une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .  
Dans la suite de cette partie, ce prolongement sera encore noté  $f$ . [S]
- Pour tout entier naturel, calculer  $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$ . [S]
- On pose  $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . [S]
- Déduire de ce qui précède que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ . [S]

**III. Calcul des intégrales**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$ 

1. Montrer que si  $|u| \leq \alpha$ , alors  $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^\alpha$ . [S]
2. Soit  $\varphi$  une application continue et bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .
  - (a) Pour tout  $(k, t)$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{+*}$ , montrer que  $x \mapsto x^k \varphi(x) e^{-tx}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .  
Pour tout  $t > 0$ , on pose  $Y(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) e^{-tx} dx$  et  $Z(t) = -\int_0^{+\infty} x \varphi(x) e^{-tx} dx$ . [S]
  - (b) On se donne  $a > 0$  et  $h$  tel que  $|h| \leq \frac{1}{2} a$ .  
Montrer que  $|Y(a+h) - Y(a) - hZ(a)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} x^2 |\varphi(x)| e^{-ax/2} dx$ . [S]
  - (c) En déduire que  $Y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et que  $Y' = Z$ . [S]
  - (d) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$ . [S]
3. On reprend les notations précédentes avec l'application  $\varphi : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ .
  - (a) Vérifier rapidement que cette application  $\varphi$  est bien continue et bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . [S]
  - (b) Calculer  $Z(t)$ , pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ . [S]
  - (c) En déduire que pour tout  $t$  strictement positif :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$ . [S]
  - (d) Interpréter alors le résultat obtenu en (II.5) [S]

**IV. Étude des intégrales**  $L_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$ 

Dans cette partie, on note toujours  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

1. Montrer que  $\varphi^n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  pour tout  $n \geq 2$ .  
Dans la suite de ce problème, on se propose d'étudier les intégrales  $L_n = \int_0^{+\infty} \varphi^n(x) dx$   
Montrer que  $L_{2n} > 0$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ . [S]
2. Dans cette question, on fixe  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , et on va montrer que  $L_{2n+1} > 0$ .  
On pose  $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \varphi^{2n+1}(x) dx$ , pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ .
  - (a) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , montrer que  $u_k = (-1)^k \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t + k\pi}\right)^{2n+1} dt$ . [S]
  - (b) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , prouver que  $u_{2k} + u_{2k+1} > 0$ . [S]
  - (c) En considérant  $W_m = \int_0^{2m\pi} \varphi(x)^{2n+1} dx$  (avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ) prouver que  $L_{2n+1} > 0$ . [S]



3. Dans cette question, on va montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$ .

(a) Montrer que  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ . [S]

(b) On se donne  $n \geq 2$ , et  $a$  dans  $]0, \pi[$ . Montrer que  $0 < L_n < a + \pi\varphi^n(a) + \frac{1}{(n-1)\pi^{n-1}}$ .

Indication :  $\mathbb{R}^+ = [0, a] \cup [a, \pi] \cup [\pi + \infty[$ . [S]

(c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$ . [S]

## V. Calcul des intégrales $L_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$

Dans cette partie,  $n \geq 2$  est fixé. On note  $f_n$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \sin^n(x)$ .

1. (a) Établir que  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $f_n^{(k)}(x) = o(x^{n-1-k})$  au voisinage de 0.

Indication : développements limités en 0 obtenus par Taylor-Young. [S]

(b) Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , l'application  $f_n^{(k)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . [S]

2. Soit  $g$  une application de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $[a, b]$ , avec  $0 < a < b$ . Montrer que :

$$\int_a^b f_n(x)g^{(n-1)}(x) dx = \left[ \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k f_n^{(k)}(x)g^{(n-2-k)}(x) \right]_a^b + (-1)^{n-1} \int_a^b f_n^{(n-1)}(x)g(x) dx. \quad [S]$$

3. On pose  $g(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!x}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Montrer que le résultat précédent s'écrit :

$$\int_a^b \varphi^n(x) dx = - \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2-k)!}{(n-1)!} \frac{f_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}} \right]_a^b + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x} dx. \quad [S]$$

4. Dédurre de ce qui précède que  $L_n = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x} dx$ . [S]

5. Après avoir linéarisé de  $f_n(x)$ , montrer que :

$$\text{– Pour tout entier } n \geq 1 : f_{2n}^{(2n-1)}(x) = \sum_{q=1}^n C_{2n}^{n-q} (-1)^{n-q} q^{2n-1} \sin(2qx).$$

$$\text{– Pour tout } n \geq 1 : f_{2n+1}^{(2n)}(x) = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^{n-q} (-1)^{n-q} (q + \frac{1}{2})^{2n} \sin(2q + 1)x. \quad [S]$$

6. En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$L_{2n} = \frac{n\pi}{(2n)!} \sum_{q=1}^n C_{2n}^{n-q} (-1)^{n-q} q^{2n-1} \text{ et } L_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n)!} \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^{n-q} (-1)^{n-q} (q + \frac{1}{2})^{2n}.$$

Préciser notamment les valeurs de  $L_k$ , pour  $2 \leq k \leq 7$ . [S]

## Corrigé du problème

I. Existence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ .

1. (a) On effectue le changement de variable  $t = x - k\pi$  :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{k\pi + t} dt \geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{(k+1)\pi} dt, \text{ quantité égale à } \frac{2}{(k+1)\pi}. \quad [\text{Q}]$$

- (b) Si  $\varphi$  était intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , on aurait  $\int_J |\varphi| \leq \int_{\mathbb{R}^+} |\varphi|$  pour tout segment  $J$  de  $\mathbb{R}^+$ .

$$\text{Or pour tout } m \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \int_0^{m\pi} |\varphi(x)| dx = \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\varphi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}.$$

Ainsi  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{m\pi} |\varphi(x)| dx = +\infty$ . L'application  $\varphi$  n'est donc pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . [Q]

2. (a) Une fois prolongée en 0 par  $\psi(0) = \frac{1}{2}$ , l'application  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

D'autre part  $|\psi(x)| \leq \frac{2}{x^2}$ , ce qui prouve l'intégrabilité de  $\psi$  sur  $[1, +\infty[$ .

Compte tenu de sa continuité sur  $[0, 1]$ , l'application  $\psi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . [Q]

- (b) On intègre par partie sur  $[0, a]$  (une primitive de  $x \mapsto \sin x$  est  $x \mapsto 1 - \cos x$ .)

$$\int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[ \frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \psi(x) dx.$$

Le calcul précédent est justifié par la continuité de  $\psi$  en 0 et par  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ .

On a bien obtenu :  $\int_0^a \varphi(x) dx = a\psi(a) + \int_0^a \psi(x) dx$ , pour tout  $a > 0$ . [Q]

- (c) L'application  $\psi$  étant intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , on sait que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ .

D'autre part  $\lim_{a \rightarrow +\infty} a\psi(a) = 0$ .

Le résultat de la question (b) donne donc :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ .

On pose donc  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi(x) dx$  bien que  $\varphi$  soit non intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

On rappelle que l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}^+$  de  $f$  continue équivaut à celle de  $|f|$ , qui équivaut à l'existence d'une limite finie pour  $\int_0^a |f(x)| dx$  quand  $a \rightarrow +\infty$ .

Ici l'application  $\varphi$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  car  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a |\varphi(x)| dx = +\infty$ .

Pourtant, on a constaté que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

Cela tient bien sûr aux changements de signe de l'application  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^+$ , qui induisent des "compensations" d'aire, compensations qui ne se produisent pas pour  $|\varphi|$ . [Q]