

Équations fonctionnelles

Première partie

On se propose de déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \quad (1)$$

- Déterminer les solutions constantes de (1). [S]
- On suppose que f est une solution non constante de (1).
Soit F la primitive de f qui s'annule à l'origine.
 - Montrer que pour tous x, y de \mathbb{R} , on a : $F(x + y) - F(x - y) = 2f(x)F(y)$. [S]
 - Prouver que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f''(0)f(x) \\ f(0) = 1, f'(0) = 0 \end{cases}$$
 [S]
- Déterminer toutes les solutions continues de (1). [S]

Deuxième partie

On se propose de déterminer les applications continues $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x - y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \quad (2)$$

- Montrer que pour tout couple solution (f, g) de (2), l'application f est paire. [S]
- Soit (f, g) un couple solution de (2). On suppose que f n'est pas constante.
 - Montrer que pour tous x, y de \mathbb{R} , on a : $g(-x)g(-y) = g(x)g(y)$.
Montrer que g n'est pas paire, et en déduire que g est impaire. [S]
 - Calculer $f(0)$, ainsi que $f^2(x) + g^2(x)$ pour tout x de \mathbb{R} . [S]
 - Montrer que f est solution de (1). [S]
- Trouver tous les couples (f, g) solutions de (2). [S]

Troisième partie

On se propose de déterminer les applications continues $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y) \quad (3)$$

- Soit (f, g) un couple solution de (3). On suppose que f, g ne sont pas identiquement nulles.
On note F, G les primitives de f, g qui s'annulent en 0.
 - Montrer que pour tous x, y de \mathbb{R} , on a $F(x + y) - F(x - y) = 2f(x)G(y)$. [S]
 - En déduire que f et g sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . [S]
 - Prouver que l'application g vérifie la relation (1). [S]
 - Montrer que pour tous x, y de \mathbb{R} , on a : $f''(x)g(y) = f(x)g''(y)$. [S]
- Déterminer tous les couples solutions de l'équation (3). [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. La fonction constante $f : x \mapsto a$ est solution de (1) si et seulement si $2a = 2a^2$, c'est-à-dire si et seulement si a est égal à 0 ou à 1.

Les solutions constantes de (1) sont donc les applications $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$. [Q]

2. (a) Avec x fixé dans \mathbb{R} , la relation (1) s'écrit : $\forall t \in \mathbb{R}, f(x+t) + f(x-t) = 2f(x)f(t)$.

En intégrant de $t = 0$ et $t = y$ (où y est un réel donné) on obtient :

$$\int_0^y f(x+t) dt + \int_0^y f(x-t) dt = 2f(x) \int_0^y f(t) dt = 2f(x)F(y)$$

$$\text{Autrement dit : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \int_x^{x+y} f(u) du - \int_x^{x-y} f(u) du = 2f(x)F(y),$$

Cette égalité s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x+y) - F(x) - F(x-y) + F(x) = 2f(x)F(y).$$

$$\text{C'est-à-dire : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)F(y). \quad [\text{Q}]$$

- (b) – Si on fait $x = y = 0$ dans (1) on trouve $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si on avait $f(0) = 0$, alors il en résulterait, en posant $y = 0$ dans l'égalité (1) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = 2f(x)f(0) = 0 \text{ et } f \text{ serait identiquement nulle.}$$

On en déduit que $f(0)$ est nécessairement égal à 1.

- L'application F n'est pas constante (sinon $f = F'$ serait identiquement nulle.)

Il existe donc x_0 dans \mathbb{R} tel que $F(x_0) \neq 0$.

$$\text{D'après ce qui précède on peut écrire : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{F(x+x_0) - F(x-x_0)}{2F(x_0)}.$$

Tout d'abord, on sait que f est continue (de classe \mathcal{C}^0 .)

Supposons que f soit de classe \mathcal{C}^n , avec n dans \mathbb{N} .

Alors F (primitive de f) est de classe \mathcal{C}^{n+1} , et la relation précédente montre que l'application f est de classe \mathcal{C}^{n+1} .

Par récurrence, cela prouve que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

- On dérive l'égalité (1) par rapport à y , en considérant x comme une constante.

$$\text{On obtient : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y).$$

Si on pose $x = y = 0$, on obtient : $0 = 2f(0)f'(0)$ donc $f'(0) = 0$ car $f(0) = 1$.

- On dérive (1) deux fois par rapport à x , en considérant y comme une constante.

$$\text{On obtient : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y).$$

On dérive (1) deux fois par rapport à y , en considérant x comme une constante.

$$\text{On obtient : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

$$\text{On en déduit : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$

En particulier, en choisissant $y = 0$, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f''(0)f(x)$.

$$\text{Conclusion : } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f''(0)f(x) \\ f(0) = 1, f'(0) = 0 \end{cases} \quad [\text{Q}]$$