Équations fonctionnelles

Première partie

On se propose de déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{1}$$

1. Déterminer les solutions constantes de (1). [S]
2. On suppose que f est une solution non constante de (1).
   Soit F la primitive de f qui s'annule à l'origine.
   (a) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a : $F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)F(y)$. [S]
   (b) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f''(0)f(x) \\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0 \end{cases}$ [S]
3. Déterminer toutes les solutions continues de (1). [S]

Deuxième partie

On se propose de déterminer les applications continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{2}$$

1. Montrer que pour tout couple solution (f, g) de (2), l'application f est paire. [S]
2. Soit (f, g) un couple solution de (2). On suppose que f n'est pas constante.
   (a) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a : $g(-x)g(-y) = g(x)g(y)$.
   Montrer que g n'est pas paire, et en déduire que g est impaire. [S]
   (b) Calculer $f(0)$, ainsi que $f^2(x) + g^2(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. [S]
   (c) Montrer que f est solution de (1). [S]
3. Trouver tous les couples (f, g) solutions de (2). [S]

Troisième partie

On se propose de déterminer les applications continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y) \tag{3}$$

1. Soit (f, g) un couple solution de (3). On suppose que f, g ne sont pas identiquement nulles.
   On note F, G les primitives de f, g qui s'annulent en 0.
   (a) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a $F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)G(y)$. [S]
   (b) En déduire que f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. [S]
   (c) Prouver que l'application g vérifie la relation (1). [S]
   (d) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x)g(y) = f(x)g''(y)$. [S]
2. Déterminer tous les couples solutions de l'équation (3). [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. La fonction constante $f : x \mapsto a$ est solution de (1) si et seulement si $2a = 2a^2$, c'est-à-dire si et seulement si a est égal à 0 ou à 1.

   Les solutions constantes de (1) sont donc les applications $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$. [Q]

2. (a) Avec x fixé dans $\mathbb{R}$, la relation (1) s'écrit : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(x+t) + f(x-t) = 2f(x)f(t)$.

   En intégrant de $t = 0$ et $t = y$ (où y est un réel donné) on obtient :

   $$\int_0^y f(x+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(x-t)\,\mathrm{d}t = 2f(x)\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t = 2f(x)F(y)$$

   Autrement dit : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \displaystyle\int_x^{x+y} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_x^{x-y} f(u)\,\mathrm{d}u = 2f(x)F(y),$

   Cette égalité s'écrit :

   $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x+y) - F(x) - F(x-y) + F(x) = 2f(x)F(y).$

   C'est-à-dire : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)F(y).$ [Q]

   (b) – Si on fait $x = y = 0$ dans (1) on trouve $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

   Si on avait $f(0) = 0$, alors il en résulterait, en posant $y = 0$ dans l'égalité (1) :

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ et f serait identiquement nulle.

   On en déduit que $f(0)$ est nécessairement égal à 1.

   – L'application F n'est pas constante (sinon $f = F'$ serait identiquement nulle.)

   Il existe donc x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $F(x_0) \neq 0$.

   D'après ce qui précède on peut écrire : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{F(x+x_0) - F(x-x_0)}{2F(x_0)}$.

   Tout d'abord, on sait que f est continue (de classe $\mathcal{C}^0$.)

   Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$, avec n dans $\mathbb{N}$.

   Alors F (primitive de f) est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et la relation précédente montre que l'application f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   Par récurrence, cela prouve que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   – On dérive l'égalité (1) par rapport à y, en considérant x comme une constante.

   On obtient : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$.

   Si on pose $x = y = 0$, on obtient : $0 = 2f(0)f'(0)$ donc $f'(0) = 0$ car $f(0) = 1$.

   – On dérive (1) deux fois par rapport à x, en considérant y comme une constante.

   On obtient : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$.

   On dérive (1) deux fois par rapport à y, en considérant x comme une constante.

   On obtient : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.

   On en déduit : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.

   En particulier, en choisissant $y = 0$, on trouve : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f''(0)f(x)$.

   Conclusion : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f''(0)f(x) \\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0 \end{cases}$ [Q]