

Deux études de familles de fonctions

Problème 1

Pour tout réel λ , on note f_λ l'application définie par $f_\lambda(x) = \frac{4x}{\lambda + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|}$.

On note \mathcal{C}_λ la courbe représentative de f_λ .

1. (a) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_λ de f_λ .
Placer soigneusement, les uns par rapport aux autres, les réels de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_\lambda$. [S]
- (b) Montrer qu'on peut prolonger f_λ par continuité aux points 0 et 4.
Dans la suite, on supposera que f_λ est ainsi prolongée. [S]
2. (a) Étudier la dérivabilité de f_λ en 0 et en 4 (on donnera l'allure de \mathcal{C}_λ). [S]
- (b) Étudier les asymptotes verticales de la courbe \mathcal{C}_λ . [S]
- (c) Étudier l'application f_λ au voisinage de $\pm \infty$. On vérifiera notamment que \mathcal{C}_λ est asymptote à une parabole quand $\lambda = 0$, et à une droite quand $\lambda \neq 0$. On précisera l'équation de l'asymptote et le placement de la courbe par rapport à celle-ci. [S]
3. (a) Étudier les variations de l'application g_λ définie par $4g_\lambda(x) = \left(\lambda + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right| \right)^2 f'_\lambda(x)$. [S]
- (b) En discutant suivant λ , déterminer le signe de f'_λ par intervalles.
En déduire les tableaux de variation de f_λ dans les cas suivants :
 $\lambda > 2$, $\lambda = 2$, $0 < \lambda < 2$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$. [S]
- (c) Construire les courbes pour $\lambda = 3$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda = -2$. [S]

Problème 2

Pour tout réel λ , on définit l'application f_λ par $f_\lambda(x) = (x - \lambda)^x$.

On note \mathcal{C}_λ la courbe représentative de f_λ .

1. Préciser le domaine de définition \mathcal{D}_λ de f_λ , ainsi que la limite $\ell_\lambda = \lim_{x \rightarrow \lambda^+} f_\lambda(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. [S]
2. Quand ℓ_λ est finie, étudier l'allure de \mathcal{C}_λ au voisinage de (λ, ℓ_λ) . [S]
3. On note u_λ l'application définie sur \mathcal{D}_λ par $f'_\lambda(x) = u_\lambda(x)f_\lambda(x)$.
 - (a) Si $\lambda < 0$, montrer que u_λ ne s'annule qu'une seule fois.
En déduire le tableau des variations de f_λ dans ce cas. [S]
 - (b) Étudier les variations de f_λ quand $\lambda = 0$. [S]
4. (a) Étudier les variations de u_λ quand $\lambda > 0$. En déduire que :
 - Si $\lambda > e^{-2}$, alors $u_\lambda(x) > 0$ pour tout x de \mathcal{D}_λ .
 - Si $\lambda = e^{-2}$, alors $u_\lambda(x) \geq 0$ sur \mathcal{D}_λ et ne s'annule qu'en un seul point.
 - Si $0 < \lambda < e^{-2}$, alors $u_\lambda(x)$ s'annule en μ_1, μ_2 , avec $\lambda < \mu_1 < 2\lambda < \mu_2$. [S]
- (b) En déduire les différents tableaux de variations possibles pour f_λ quand $\lambda > 0$. [S]
5. Étudier le placement respectif des courbes $y = f_{\lambda_1}(x)$ et $y = f_{\lambda_2}(x)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. [S]
6. Construire sur un même graphique les représentations graphiques des applications f_λ pour chacun des cas rencontrés dans ce problème. [S]

Corrigé du problème

Problème 1

1. (a) L'ensemble \mathcal{D}_λ est $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ privé des solutions de l'équation (E) : $\ln \left| \frac{x}{x-4} \right| + \lambda = 0$.

Or (E) $\Leftrightarrow \left| \frac{x-4}{x} \right| = e^\lambda \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x} = \varepsilon e^\lambda \Leftrightarrow x = \frac{4}{1 - \varepsilon e^\lambda}$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

On en déduit : $\mathcal{D}_\lambda = \mathbb{R} \setminus \{0, 4, a_\lambda, b_\lambda\}$, en notant $a_\lambda = \frac{4}{1 - e^\lambda}$ et $b_\lambda = \frac{4}{1 + e^\lambda}$.

On doit maintenant placer a_λ et b_λ par rapport à 0 et 4.

– Si $\lambda = 0$, alors a_λ n'est pas défini et $b_\lambda = 2$. Dans ce cas $\mathcal{D}_\lambda = \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 4\}$.

– Si $\lambda \neq 0$, alors 0, 4, a_λ , b_λ sont deux à deux distincts.

Si $\lambda < 0$, on a $0 < b_\lambda < 4 < a_\lambda$; si $\lambda > 0$, et $a_\lambda < 0 < b_\lambda < 4$. [Q]

(b) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lambda + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right| \right) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_\lambda(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = 0^-$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\lambda + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right| \right) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 4} f_\lambda(x) = 0^+$.

On peut ainsi prolonger f_λ par continuité en posant $f_\lambda(0) = f_\lambda(4) = 0$. [Q]

2. (a) On a $\frac{f_\lambda(x)}{x} = \frac{4}{\lambda + \ln|x| - \ln|x-4|} \underset{0}{\sim} \frac{4}{\ln|x|}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\lambda(x)}{x} = 0^-$.

On en déduit que f_λ est dérivable en 0, avec $f'_\lambda(0) = 0$.

La courbe $y = f_\lambda(x)$ présente donc une tangente horizontale à l'origine.

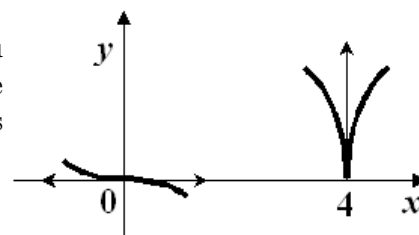
En fait c'est une tangente d'inflexion car $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_\lambda(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = 0^-$.

On a $\frac{f_\lambda(x)}{x-4} = \frac{4x}{(\lambda + \ln|x| - \ln|x-4|)(x-4)} \underset{4}{\sim} \frac{16}{(4-x)\ln|x-4|}$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f_\lambda(x)}{x-4} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f_\lambda(x)}{x-4} = +\infty$.

On en déduit que f_λ n'est pas dérivable en $x = 4$.

Plus précisément, la courbe $y = f_\lambda(x)$ présente au point (4, 0) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. Voici l'allure de la courbe au voisinage des points d'abscisses 0 et 4.



[Q]

(b) Il n'y a d'asymptote verticale que lorsque x tend vers a_λ ou vers b_λ .

Notons $d_\lambda(x) = \lambda + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|$. On a $d'_\lambda(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x(4-x)}$.

d_λ est donc décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]4, +\infty[$, et croissante sur $]0, 4[$.

Or d_λ s'annule en a_λ et en b_λ . On en déduit les résultats suivants :

– Si $\lambda < 0$, on a $0 < b_\lambda < 4 < a_\lambda$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow b_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^-$, $\lim_{x \rightarrow b_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow a_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow a_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^-$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow b_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow b_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a_\lambda^-} f_\lambda(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a_\lambda^+} f_\lambda(x) = -\infty$.

– Si $\lambda > 0$, on a $a_\lambda < 0 < b_\lambda < 4$ (attention au signe de a_λ ...)

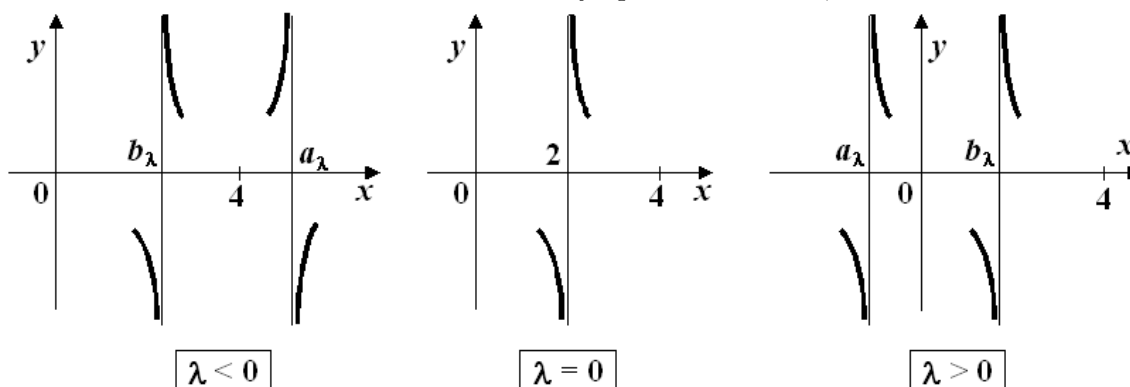
$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow a_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow a_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow b_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow b_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^+.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty.$$

– Si $\lambda = 0$, on a $0 < b_\lambda = 2 < 4$, et a_λ n'est pas défini.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} d_\lambda(x) = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} d_\lambda(x) = 0^+ \text{ puis } \lim_{x \rightarrow 2^-} f_\lambda(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f_\lambda(x) = +\infty$$

On voit maintenant l'allure des asymptotes verticales, dans les différents cas.



[Q]

(c) • On commence par traiter le cas $\lambda = 0$.

D'après l'énoncé, il faut arriver à $f_\lambda(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Il est plus simple de développer en 0. On pose $x = \frac{1}{X}$ et on trouve :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{4x}{\ln\left|\frac{x}{x-4}\right|} = \frac{-4}{X \ln(1-4X)} = \frac{4}{X\left(4X + 8X^2 + \frac{64}{3}X^3 + 64X^4 + o(X^4)\right)} \\ &= \frac{1}{X^2} \left(1 + 2X + \frac{16}{3}X^2 + 16X^3 + o(X^3)\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{X^2} \left[1 - \left(2X + \frac{16}{3}X^2 + 16X^3\right) + \left(4X^2 + \frac{64}{3}X^3\right) - \left(8X^3\right) + o(X^3)\right] \\ &= \frac{1}{X^2} \left(1 - 2X - \frac{4}{3}X^2 - \frac{8}{3}X^3 + o(X^3)\right) \\ &= \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} - \frac{4}{3} - \frac{8X}{3} + o(X) \end{aligned}$$

On obtient $f_0(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{3} - \frac{8}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ en revenant à la variable x .

Ainsi \mathcal{C}_0 est asymptote à la parabole $\mathcal{P} : y(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{3}$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Le placement est donné par le signe de la quantité $f_0(x) - y(x) \underset{\infty}{\sim} -\frac{8}{3x}$.

Ainsi \mathcal{C}_0 est au-dessus de \mathcal{P} quand $x \rightarrow -\infty$ et en-dessous quand $x \rightarrow +\infty$.

Plus modestement, on a $f_0(x) \sim x^2$ au voisinage de $\pm\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow \infty} = +\infty$.

La branche infinie est bien sûr une "branche parabolique" de direction Oy .

- On va maintenant traiter le cas général $\lambda \neq 0$. On pose toujours $X = 1/x$.

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \frac{4}{X(\alpha - \ln(1 - 4X))} = \frac{4}{\alpha X \left(1 + \frac{4}{\alpha} X + \frac{8}{\alpha} X^2 + \frac{64}{3\alpha} X^3 + o(X^3)\right)} \\ &= \frac{4}{\alpha X} \left[1 - \left(\frac{4}{\alpha} X + \frac{8}{\alpha} X^2 + \frac{64}{3\alpha} X^3\right) + \left(\frac{16}{\alpha^2} X^2 + \frac{64}{\alpha^2} X^3\right) - \frac{64}{\alpha^3} X^3 + o(X^3) \right] \\ &= \frac{4}{\alpha X} \left[1 - \frac{4}{\alpha} X + \frac{8(2-\alpha)}{\alpha^2} X^2 - \frac{64(\alpha^2 - 3\alpha + 3)}{3\alpha^3} X^3 + o(X^3) \right] \end{aligned}$$

Ainsi : $f_\lambda(x) = \frac{4}{\alpha} x - \frac{16}{\alpha^2} + \frac{32(2-\alpha)}{\alpha^3} \frac{1}{x} - \frac{256(\alpha^2 - 3\alpha + 3)}{3\alpha^4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Cela traduit l'existence de l'asymptote oblique $y = \frac{4}{\alpha} x - \frac{16}{\alpha^2}$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

- Si $\alpha = 2$, on a $f_2(x) = 2x - 4 - \frac{16}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Dans ce cas, la courbe est en-dessous de son asymptote quand $x \rightarrow \pm\infty$.

- Si $\alpha \neq 2$, le placement est donné par le signe de $\frac{2-\alpha}{\alpha x}$.

Si $\alpha < 0$ ou $\alpha > 2$, la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$, et en-dessous au voisinage de $+\infty$.

Si $0 < \alpha < 2$, la courbe est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$, et au-dessus au voisinage de $+\infty$.

S'il n'y avait pas eu le cas particulier $\alpha = 2$, on aurait pu se contenter de pousser le développement généralisé de $f_\lambda(x)$ à l'ordre immédiatement inférieur. [Q]

3. (a) On trouve $g_\lambda(x) = \lambda + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right| - x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} \right) = \ln \left| \frac{x}{x-4} \right| + \lambda + \frac{4}{x-4}$.

L'application g_λ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

On observe que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_\lambda(x) = \lambda$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} g_\lambda(x) = -\infty$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) \ln |x-4| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} (x-4)g_\lambda(x) = 4 \Rightarrow g_\lambda(x) \sim \frac{4}{x-4}$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 4^-} g_\lambda(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} g_\lambda(x) = +\infty$.

Enfin, pour $x \notin \{0, 4\}$, on trouve : $g'_\lambda(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} - \frac{4}{(x-4)^2} = \frac{8(2-x)}{x(x-4)^2}$.

On constate que $g_\lambda(2) = \lambda - 2$.

Voici le tableau des variations de g_λ .

$f'_\lambda(x)$ a le signe de $g_\lambda(x)$ sur \mathcal{D}_λ .

On voit que le nombre de solutions de $g_\lambda(x) = 0$ dépend du placement de λ par rapport à 0 et à 2.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
g'	-	+	0	-	-
g	λ	$\lambda-2$	$\lambda-2$	$+\infty$	λ

On remarque qu'aux points $x \in \{a_\lambda, b_\lambda\}$, on a $g_\lambda(x) = \frac{4}{x-4} \neq 0$.

Autrement dit, les points éventuels où g_λ s'annule sont distincts de a_λ et de b_λ . [Q]