

Variations sur la méthode de Newton

I. Méthode de Newton

Soit g une application définie sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) et à valeurs dans \mathbb{R} .

On suppose en outre que $g([a, b]) \subset [a, b]$: le segment $[a, b]$ est donc *stable* par g .

1. On suppose que g est continue sur $[a, b]$.

Montrer que l'équation (E) : $g(x) = x$ possède au moins une solution sur $[a, b]$. [S]

2. On suppose que g est k -lipschitzienne sur $[a, b]$, avec $0 \leq k < 1$.

Montrer que l'équation (E) possède une solution unique α sur $[a, b]$. [S]

3. On garde les hypothèses de la question précédente. On se donne un réel x_0 dans $[a, b]$.

On définit alors une suite (x_n) de $[a, b]$ en posant : $\forall n \geq 0, x_{n+1} = g(x_n)$.

Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a $|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|$. Conclusion ? [S]

4. On suppose maintenant que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et que : $\forall x \in [a, b], |g'(x)| < 1$.

Montrer qu'on peut conclure comme dans les questions 2 et 3. [S]

5. On reprend les hypothèses de I.4, et les notations de I.3.

On suppose que $(x_n)_{n \geq 0}$ n'est pas stationnaire en α . Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha)$. [S]

6. On suppose ici que g est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

On suppose qu'il existe α dans I tel que $g(\alpha) = \alpha$ et $|g'(\alpha)| < 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'on puisse appliquer les résultats précédents sur le segment $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. [S]

7. Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle ouvert I , à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe α dans I tel que $f(\alpha) = 0$.

On suppose que f' ne s'annule pas sur I et on pose : $\forall x \in I, g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

- (a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si on se donne x_0 dans $J = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, et si on définit $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout n , alors la suite (x_n) converge vers α . [S]

- (b) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $|x_{n+1} - \alpha| \leq K |x_n - \alpha|^2$ pour tout n de \mathbb{N} .

Indication : appliquer une inégalité de Taylor-Lagrange à f sur le segment $[x_n, \alpha]$. [S]

8. On garde les hypothèses et les notations de la question 7. La *méthode de Newton* consiste en la mise en place de la suite (x_n) pour approcher la racine α de f sur I . On vient de voir que la suite (x_n) converge vers α si x_0 est "assez près" de α . On étudie ici, sur deux exemples, le comportement de la suite (x_n) si x_0 est choisi de façon quelconque dans I .

- (a) Indiquer comme le point x_{n+1} se déduit, graphiquement, du point x_n . [S]

- (b) On suppose que f est convexe sur $I = \mathbb{R}$. Montrer que la suite (x_n) a la monotonie contraire de celle de f (à partir de x_1) et qu'elle converge vers α (quel que soit x_0).

Préciser rapidement ce qu'il en est si f est concave. [S]

- (c) On suppose par exemple $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \arctan x$. Dans ces conditions $\alpha = 0$.

Justifier l'existence et l'unicité de $a > 0$ tel que $g(a) = -a$.

En considérant l'application $g \circ g$, montrer alors que :

– Si $|x_0| < a$, la suite (x_n) converge vers 0.

– Si $|x_0| = a$, la suite (x_n) est 2-périodique, ne prenant que les valeurs a et $-a$.

– Si $|x_0| > a$, la suite (x_n) est divergente. [S]

II. Application aux polynômes

Soit $P = x^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k$ un polynôme unitaire à coefficients réels de degré $d \geq 2$.

1. Montrer que pour toute racine réelle ou complexe λ de P , on a $|\lambda| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\right)$.
Indication : raisonner par la contraposée. [S]

2. Dorénavant, on suppose que toutes les racines de P sont réelles.

Montrer que toutes les racines du polynôme P' sont elles aussi réelles. [S]

3. On note α la plus grande racine de P . On pose $I =]\alpha, +\infty[$ et $\bar{I} = [\alpha, +\infty[$.

Montrer que les applications $P, P', \dots, P^{(d)}$ sont strictement positives sur I . [S]

4. On pose $g(x) = x - P(x)/P'(x)$ pour tout x de I .

(a) Montrer que l'application g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\bar{I} = [\alpha, +\infty[$. [S]

(b) Montrer que si α est racine simple de P , alors $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) = P''(\alpha)/P'(\alpha)$. [S]

(c) Montrer que si α est racine de multiplicité $m \geq 2$ de P , alors $g'(\alpha) = 1 - 1/m$. [S]

5. (a) Montrer que g est strictement croissante sur \bar{I} et que $g(\bar{I}) \subset \bar{I}$. [S]

(b) On se donne $x_0 > \max\left(1, \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\right)$. Pour tout n de \mathbb{N} , on pose $x_{n+1} = g(x_n)$.

Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α . [S]

6. On étudie ici la rapidité globale (sur tout I) de la convergence de (x_n) vers α . On constate en particulier que cette "vitesse" est une fonction décroissante du degré d de P .

On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_q$ les différentes racines de P (donc $\lambda_q = \alpha$.)

Pour chaque k de $\{1, \dots, q\}$, on note m_k la multiplicité de λ_k comme racine de P .

(a) Montrer que la décomposition en éléments simples de $R = P'/P$ est $R = \sum_{k=1}^q \frac{m_k}{x - \lambda_k}$. [S]

(b) Prouver que $R^2(x) \leq -dR'(x)$, pour tout x distinct de $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. [S]

(c) En déduire : $\forall x \in I, 0 < g'(x) \leq 1 - \frac{1}{d}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_n - \alpha \leq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^n (x_0 - \alpha)$. [S]

7. Dans cette question, on étudie la rapidité de convergence de (x_n) vers α , d'un point de vue local (à proximité de α .) On constate que si α est racine simple de P , la convergence est beaucoup plus rapide que s'il est racine multiple.

(a) On suppose que α est racine simple de P . Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{P''(\alpha)}{2P'(\alpha)}$.

On exprime cette situation en disant que la convergence de (x_n) vers α est de type au moins *quadratique*. En gros le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque étape (à proximité de α , dans la limite des capacités de la calculatrice.) [S]

(b) Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \geq 2$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = 1 - \frac{1}{m}$.

Ici la vitesse de convergence est donc seulement *linéaire*. [S]

8. On va modifier la méthode de Newton pour que la vitesse de convergence de (x_n) vers α soit toujours quadratique, même si α est une racine multiple de P .

(a) Montrer que α est une racine simple de $f = P/P'$. [S]

(b) On garde x_0 comme en (I.5.b) mais on utilise cette fois $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et des valeurs de P, P', P'' en x_n . [S]

Corrigé du problème

I. Méthode de Newton

1. $h : x \mapsto g(x) - x$ est continue sur $[a, b]$, et $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$.
 Il existe donc α dans $[a, b]$ tel que $h(\alpha) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires.)
 Autrement dit, l'équation (E) possède au moins une solution α dans $[a, b]$. [Q]
2. g est continue car lipschitzienne. Il existe donc α dans $[a, b]$ tel que $g(\alpha) = \alpha$.
 Si $g(\beta) = \beta$, alors $|g(\beta) - g(\alpha)| \leq k|\beta - \alpha| \Rightarrow (1 - k)|\beta - \alpha| \leq 0 \Rightarrow |\beta - \alpha| \leq 0$.
 Il en résulte $\beta = \alpha$, ce qui prouve l'unicité de la solution α de (E). [Q]
3. C'est évident pour $n = 0$. Supposons $|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|$ pour un certain $n \geq 0$.
 Alors $|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha| \leq k^{n+1} |x_0 - \alpha|$.
 Cela prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
 On a $0 \leq k < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$: la suite (x_n) converge vers α . [Q]
4. L'application $x \mapsto |g'(x)|$ est continue sur $[a, b]$ donc elle atteint son maximum.
 Ainsi il existe β dans $[a, b]$ tel que $k = |g'(\beta)| = \max_{[a,b]} |g'(x)|$, et $k = |g'(\beta)| < 1$.
 On en déduit que g est k -lipschitzienne sur $[a, b]$ (caractérisation classique vue en cours.)
 Puisque $0 \leq k < 1$, on peut encore appliquer les résultats de la question précédente. [Q]
5. Pour tout n de \mathbb{N} , on a $x_n \neq \alpha$, sinon la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ serait stationnaire en α .
 Pour tout n de \mathbb{N} , on applique le théorème des accroissements finis à g sur $[\alpha, x_n]$.
 On en déduit l'existence de y_n dans $]x_n, \alpha[$ tel que $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(y_n)$.
 On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g'(y_n) = g'(\alpha)$ (l'application g' est continue.)
 Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(y_n) = g'(\alpha)$. [Q]
6. Puisque $|g'(\alpha)| < 1$ et que g' est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $\begin{cases} J = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I \\ \forall x \in J, |g'(x)| < 1 \end{cases}$
 Soit x dans J . On applique l'inégalité des accroissements finis à g sur $[\alpha, x]$.
 On en déduit l'inégalité $|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leq |x - \alpha| \leq \delta$, ce qui prouve $g(x) \in J$.
 Ainsi le segment J est stable par g , et on peut y appliquer les résultats précédents. [Q]
7. (a) g est de classe \mathcal{C}^1 sur I , car f est de classe \mathcal{C}^2 : Pour tout x de I , $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.
 D'autre part $f(\alpha) = 0$ donc $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = 0$: a fortiori $|g'(\alpha)| < 1$.
 Les hypothèses sont donc réunies pour qu'on puisse appliquer le résultat de I.6.
 En choisissant $\delta > 0$ comme indiqué dans I.6, l'intervalle $J = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ est stable par l'application g , et la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α . [Q]

(b) Sur le segment $J = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, l'application continue f'' est bornée.
 On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'application f , à l'ordre 2, sur $[x_n, \alpha]$.
 On en déduit $|f(\alpha) - f(x_n) - (\alpha - x_n)f'(x_n)| \leq M(\alpha - x_n)^2$, avec $M = \frac{1}{2} \sup_{x \in J} |f''(x)|$.
 Puisque $f(\alpha) = 0$, cela s'écrit $|x_{n+1} - \alpha| = \left| x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha \right| \leq \frac{M}{|f'(x_n)|} (x_n - \alpha)^2$.
 Sur le segment J , l'application continue non nulle $x \mapsto |f'(x)|$ a un minimum $m > 0$.
 En posant $K = M/m$, on trouve donc $\forall n \geq 0, |x_{n+1} - \alpha| \leq K(x_n - \alpha)^2$. [Q]