Variations sur la méthode de Newton

I. Méthode de Newton

Soit g une application définie sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose en outre que $g([a,b]) \subset [a,b]$: le segment $[a,b]$ est donc *stable* par g.

1. On suppose que g est continue sur $[a,b]$.
   Montrer que l'équation (E) : $g(x)=x$ possède au moins une solution sur $[a,b]$. [S]
2. On suppose que g est k-lipschitzienne sur $[a,b]$, avec $0 \le k < 1$.
   Montrer que l'équation (E) possède une solution unique α sur $[a,b]$. [S]
3. On garde les hypothèses de la question précédente. On se donne un réel x_0 dans $[a,b]$.
   On définit alors une suite (x_n) de $[a,b]$ en posant : $\forall\, n \ge 0,\ x_{n+1}=g(x_n)$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $|x_n-\alpha| \le k^n\,|x_0-\alpha|$. Conclusion ? [S]
4. On suppose maintenant que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que : $\forall\, x \in [a,b],\ |g'(x)|<1$.
   Montrer qu'on peut conclure comme dans les questions 2 et 3. [S]
5. On reprend les hypothèses de I.4, et les notations de I.3.
   On suppose que $(x_n)_{n\ge 0}$ n'est pas stationnaire en α. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-x_{n+1}}{\alpha-x_n}=g'(\alpha)$. [S]
6. On suppose ici que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
   On suppose qu'il existe α dans I tel que $g(\alpha)=\alpha$ et $|g'(\alpha)|<1$. Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel qu'on puisse appliquer les résultats précédents sur le segment $[\,\alpha-\delta,\alpha+\delta\,]$. [S]
7. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert I, à valeurs réelles.
   On suppose qu'il existe α dans I tel que $f(\alpha)=0$.
   On suppose que f' ne s'annule pas sur I et on pose : $\forall\, x \in I,\ g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   (a) Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel que si on se donne x_0 dans $J=[\,\alpha-\delta,\alpha+\delta]$, et si on définit $x_{n+1}=g(x_n)$ pour tout n, alors la suite (x_n) converge vers α. [S]
   (b) Montrer qu'il existe $K>0$ tel que $|x_{n+1}-\alpha| \le K\,|x_n-\alpha|^2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Indication : appliquer une inégalité de Taylor-Lagrange à f sur le segment $[x_n,\alpha]$. [S]
8. On garde les hypothèses et les notations de la question 7. La *méthode de Newton* consiste en la mise en place de la suite (x_n) pour approcher la racine α de f sur I. On vient de voir que la suite (x_n) converge vers α si x_0 est "assez près" de α. On étudie ici, sur deux exemples, le comportement de la suite (x_n) si x_0 est choisi de façon quelconque dans I.
   (a) Indiquer comme le point x_{n+1} se déduit, graphiquement, du point x_n. [S]
   (b) On suppose que f est convexe sur $I=\mathbb{R}$. Montrer que la suite (x_n) a la monotonie contraire de celle de f (à partir de x_1) et qu'elle converge vers α (quel que soit x_0.)
   Préciser rapidement ce qu'il en est si f est concave. [S]
   (c) On suppose par exemple $I=\mathbb{R}$ et $f(x)=\arctan x$. Dans ces conditions $\alpha=0$.
   Justifier l'existence et l'unicité de $a>0$ tel que $g(a)=-a$.
   En considérant l'application $g\circ g$, montrer alors que :
   – Si $|x_0|<a$, la suite (x_n) converge vers 0.
   – Si $|x_0|=a$, la suite (x_n) est 2-périodique, ne prenant que les valeurs a et $-a$.
   – Si $|x_0|>a$, la suite (x_n) est divergente. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

II. Application aux polynômes

Soit $P = x^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k$ un polynôme unitaire à coefficients réels de degré $d \geq 2$.

1. Montrer que pour toute racine réelle ou complexe λ de P, on a $|\lambda| \leq \max\Bigl(1, \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\Bigr)$.
   Indication : raisonner par la contraposée. [S]

2. Dorénavant, on suppose que toutes les racines de P sont réelles.
   Montrer que toutes les racines du polynôme P' sont elles aussi réelles. [S]

3. On note α la plus grande racine de P. On pose $I =]\,\alpha, +\infty\,[$ et $\overline{I} = [\,\alpha, +\infty\,[$.
   Montrer que les applications $P, P', \ldots, P^{(d)}$ sont strictement positives sur I. [S]

4. On pose $g(x) = x - P(x)/P'(x)$ pour tout x de I.
   (a) Montrer que l'application g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{I} = [\,\alpha, +\infty\,[$. [S]
   (b) Montrer que si α est racine simple de P, alors $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) = P''(\alpha)/P'(\alpha)$. [S]
   (c) Montrer que si α est racine de multiplicité $m \geq 2$ de P, alors $g'(\alpha) = 1 - 1/m$. [S]

5. (a) Montrer que g est strictement croissante sur $\overline{I}$ et que $g(\overline{I}) \subset \overline{I}$. [S]
   (b) On se donne $x_0 > \max\Bigl(1, \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\Bigr)$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $x_{n+1} = g(x_n)$.
   Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α. [S]

6. On étudie ici la rapidité globale (sur tout I) de la convergence de (x_n) vers α. On constate en particulier que cette "vitesse" est une fonction décroissante du degré d de P.
   On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_q$ les différentes racines de P (donc $\lambda_q = \alpha$.)
   Pour chaque k de $\{1, \ldots, q\}$, on note m_k la multiplicité de λ_k comme racine de P.
   (a) Montrer que la décomposition en éléments simples de $R = P'/P$ est $R = \sum_{k=1}^{q} \dfrac{m_k}{x - \lambda_k}$. [S]
   (b) Prouver que $R^2(x) \leq -d\, R'(x)$, pour tout x distinct de $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. [S]
   (c) En déduire : $\forall\, x \in I,\ 0 < g'(x) \leq 1 - \frac{1}{d}$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq x_n - \alpha \leq \Bigl(1 - \frac{1}{d}\Bigr)^n (x_0 - \alpha)$. [S]

7. Dans cette question, on étudie la rapidité de convergence de (x_n) vers α, d'un point de vue local (à proximité de α.) On constate que si α est racine simple de P, la convergence est beaucoup plus rapide que s'il est racine multiple.
   (a) On suppose que α est racine simple de P. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \dfrac{P''(\alpha)}{2P'(\alpha)}$.
   On exprime cette situation en disant que la convergence de (x_n) vers α est de type au moins *quadratique*. En gros le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque étape (à proximité de α, dans la limite des capacités de la calculatrice.) [S]
   (b) Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \geq 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = 1 - \dfrac{1}{m}$.
   Ici la vitesse de convergence est donc seulement *linéaire*. [S]

8. On va modifier la méthode de Newton pour que la vitesse de convergence de (x_n) vers α soit toujours quadratique, même si α est une racine multiple de P.
   (a) Montrer que α est une racine simple de $f = P/P'$. [S]
   (b) On garde x_0 comme en (I.5.b) mais on utilise cette fois $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.
   Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et des valeurs de P, P', P'' en x_n. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigé du problème

I. Méthode de Newton

1. $h : x \mapsto g(x) - x$ est continue sur $[a, b]$, et $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$.
   Il existe donc α dans $[a, b]$ tel que $h(\alpha) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires.)
   Autrement dit, l'équation (E) possède au moins une solution α dans $[a, b]$. [Q]

2. g est continue car lipschitzienne. Il existe donc α dans $[a, b]$ tel que $g(\alpha) = \alpha$.
   Si $g(\beta) = \beta$, alors $|g(\beta) - g(\alpha)| \leq k\,|\beta - \alpha| \Rightarrow (1 - k)\,|\beta - \alpha| \leq 0 \Rightarrow |\beta - \alpha| \leq 0$.
   Il en résulte $\beta = \alpha$, ce qui prouve l'unicité de la solution α de (E). [Q]

3. C'est évident pour $n = 0$. Supposons $|x_n - \alpha| \leq k^n\,|x_0 - \alpha|$ pour un certain $n \geq 0$.
   Alors $|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq k\,|x_n - \alpha| \leq k^{n+1}\,|x_0 - \alpha|$.
   Cela prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.
   On a $0 \leq k < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$: la suite (x_n) converge vers α. [Q]

4. L'application $x \mapsto |g'(x)|$ est continue sur $[a, b]$ donc elle atteint son maximum.
   Ainsi il existe β dans $[a, b]$ tel que $k = |g'(\beta)| = \max\limits_{[a,b]} |g'(x)|$, et $k = |g'(\beta)| < 1$.
   On en déduit que g est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ (caractérisation classique vue en cours.)
   Puisque $0 \leq k < 1$, on peut encore appliquer les résultats de la question précédente. [Q]

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $x_n \neq \alpha$, sinon la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ serait stationnaire en α.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on applique le théorème des accroissements finis à g sur $[\alpha, x_n]$.
   On en déduit l'existence de y_n dans $]x_n, \alpha[$ tel que $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(y_n)$.
   On a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} g'(y_n) = g'(\alpha)$ (l'application g' est continue.)
   Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - x} = \lim\limits_{n\to\infty} g'(y_n) = g'(\alpha)$. [Q]

6. Puisque $|g'(\alpha)| < 1$ et que g' est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $\begin{cases} J = [\,\alpha - \delta, \alpha + \delta\,] \subset I \\ \forall x \in J,\ |g'(x)| < 1 \end{cases}$
   Soit x dans J. On applique l'inégalité des accroissements finis à g sur $[\alpha, x]$.
   On en déduit l'inégalité $|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leq |x - \alpha| \leq \delta$, ce qui prouve $g(x) \in J$.
   Ainsi le segment J est stable par g, et on peut y appliquer les résultats précédents. [Q]

7. (a) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, car f est de classe $\mathcal{C}^2$: Pour tout x de I, $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.
   D'autre part $f(\alpha) = 0$ donc $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = 0$: a fortiori $|g'(\alpha)| < 1$.
   Les hypothèses sont donc réunies pour qu'on puisse appliquer le résultat de I.6.
   En choisissant $\delta > 0$ comme indiqué dans I.6, l'intervalle $J = [\,\alpha - \delta, \alpha + \delta\,]$ est stable par l'application g, et la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α. [Q]

   (b) Sur le segment $J = [\,\alpha - \delta, \alpha + \delta\,]$, l'application continue f'' est bornée.
   On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'application f, à l'ordre 2, sur $[x_n, \alpha]$.
   On en déduit $|f(\alpha) - f(x_n) - (\alpha - x_n)f'(x_n)| \leq M(\alpha - x_n)^2$, avec $M = \frac{1}{2} \sup\limits_{x\in J} \left|f''(x)\right|$.
   Puisque $f(\alpha) = 0$, cela s'écrit $|x_{n+1} - \alpha| = \left|x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha\right| \leq \dfrac{M}{|f'(x_n)|}(x_n - \alpha)^2$.
   Sur le segment J, l'application continue non nulle $x \mapsto |f'(x)|$ a un minimum $m > 0$.
   En posant $K = M/m$, on trouve donc : $\forall\, n \geq 0,\ |x_{n+1} - \alpha| \leq K(x_n - \alpha)^2$. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.