Homographies du plan complexe

Notations

– On note $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ l'ensemble obtenu en ajoutant à $\mathbb{C}$ un *point à l'infini*.

Pour tout z de $\mathbb{C}^*$, on pose par convention $z/0 = \infty$.

– Pour tout quadruplet $v = (a, b, c, d)$ de $\mathbb{C}^4$, on note $\delta(v) = ad - bc$.

On note $E = \{v = (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4,\ \delta(v) \neq 0\}$.

A tout élément v de E on associe l'application h_v de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans lui-même définie par :

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\},\ h_v(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}, \quad h_v(-d/c) = \infty, \quad h_v(\infty) = a/c.$

Remarque : la convention $z/0 = \infty$ permet d'inclure le cas $c = 0$ dans la définition de h_v.

Plus précisément, si $c = 0$ (donc $a \neq 0$ et $d \neq 0$) : $\forall z \in \mathbb{C},\ h_v(z) = \dfrac{az + b}{d}$, et $h_v(\infty) = \infty$.

– On note $\mathcal{H} = \{h_v,\ v \in E\}$. Les éléments de $\mathcal{H}$ sont appelées *homographies* de $\widehat{\mathbb{C}}$.

– Pour tout (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on note $s_{a,b} = h_{a,b,0,1}$. On note $\mathcal{S} = \{s_{a,b},\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$.

L'application $s_{a,b}$ est donc définie par $s_{a,b}(z) = az + b$ si $z \in \mathbb{C}$ et $s_{a,b}(\infty) = \infty$.

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont appelés *similitudes directes* de $\widehat{\mathbb{C}}$.

– On considère le plan euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct.

On identifie tout point M de ce plan avec son affixe z de $\mathbb{C}$.

Cette identification permet de parler des cercles et des droites de $\mathbb{C}$.

– Une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ est la réunion $\widehat{\Delta} = \Delta \cup \{\infty\}$, où Δ est une droite de $\mathbb{C}$.

On dit qu'une partie de $\widehat{\mathbb{C}}$ est un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ si c'est un cercle de $\mathbb{C}$ ou une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Les droites de $\widehat{\mathbb{C}}$ sont donc les cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui contiennent le point à l'infini.

Remarque : on considère dans ce problème que les cercles ont un rayon *strictement* positif.

– On note $\widehat{\mathcal{C}}$ l'ensemble dont les éléments sont les cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$.

I. Le groupe des homographies

1. Soient u un élément de E. Vérifier que $h_{\lambda u} = h_u$ pour tout λ de $\mathbb{C}^*$.

   On admettra que la réciproque est vraie. Ainsi $h_u = h_v \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^*,\ v = \lambda u$.

   Identifier l'application h_u quand $u = (1, 0, 0, 1)$. [S]

2. Soient $u = (a, b, c, d)$ et $v = (a', b', c', d')$ deux éléments de E.

   Vérifier que $u \otimes v = (aa' + bc', ab' + bd', ca' + dc', cb' + dd')$ est un élément de E.

   Montrer que $h_u \circ h_v = h_{u \otimes v}$ (on pourra se limiter au cas général). [S]

3. Montrer que toute homographie h_v est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur lui-même.

   On vérifiera plus précisément que $h_v^{-1} = h_{v'}$ avec $v' = (d, -b, -c, a)$. [S]

4. Montrer que $\mathcal{H}$ est un groupe (non commutatif) pour la loi de composition. [S]

II. L'homographie $z \mapsto 1/z$ et les cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$

On va montrer que l'homographie $z \mapsto 1/z$ est une involution de l'ensemble des cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. (a) Soit Δ une droite de $\mathbb{C}$ ne passant pas par 0.
   Soit ω la projection orthogonale de 0 sur Δ.
   Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que z est sur Δ si et seulement si $\mathrm{Re}\,((z-\omega)\,\overline{\omega}) = 0$. [S]

   (b) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathbb{C}$, et soient u, v deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$.
   Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,((z-u)\,(\overline{z}-\overline{v})) = 0$. [S]

2. On note $\varphi = h_{(0,1,1,0)}$. Vérifier que l'application φ est une involution de $\widehat{\mathbb{C}}$.
   En utilisant les résultats de la question II.1, montrer successivement que l'image par φ :

   (a) D'une droite Δ de $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par 0 est une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par 0.
   Comment ces deux droites se déduisent-elles l'une de l'autre ? [S]

   (b) D'un cercle $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ passant par 0 est une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ ne passant pas par 0.
   Indication : si ω est le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé de 0, et si on pose $\omega' = \varphi(\omega)$, on montrera que $\varphi(\mathcal{C})$ est la droite orthogonale en ω' au segment $[\,0, \omega'\,]$. [S]

   (c) D'une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ ne passant pas par 0 est un cercle de $\mathbb{C}$ passant par 0. [S]

   (d) D'un cercle de $\mathbb{C}$ ne passant par par 0 est un cercle de $\mathbb{C}$ ne passant pas par 0.
   Indication : soit u, v deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$ et alignés avec 0. Montrer que $\varphi(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[\,\varphi(u), \varphi(v)\,]$ [S]

3. On note envore φ l'application définie sur $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{C}})$ par $X \mapsto \varphi(X) = \{\varphi(z),\ z \in X\}$.
   Déduire de ce qui précède que φ réalise une involution de l'ensemble $\widehat{\mathcal{C}}$. [S]

III. Homographies et cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$

On va généraliser le résultat de la partie précédente, et montrer que toute homographie de $\widehat{\mathbb{C}}$ réalise une bijection de l'ensemble des cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur lui-même.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}$. [S]

2. Soit s un élément de $\mathcal{S}$, considéré aussi comme application de $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{C}})$ dans lui-même.
   Montrer que s réalise une bijection de l'ensemble $\widehat{\mathcal{C}}$. [S]

3. Montrer que tout élément $h = h_u$ (avec $u = (a,b,c,d)$) de $\mathcal{H}$ est :
   – Ou bien une similitude directe (si $c = 0$),
   – Ou bien (si $c \neq 0$) la composée de φ et de deux similitudes directes.
   Indication : montrer que $h = s_{a',b'} \circ \varphi \circ s_{c,d}$, avec $a' = -\delta(u)/c$ et $b' = a/c$. [S]

4. En déduire que toute homographie h réalise une bijection de $\widehat{\mathcal{C}}$ sur lui-même.
   Si $h = h_{(a,b,c,d)}$ est une homographie qui n'est pas une similitude (donc si $c \neq 0$), décrire rapidement l'image d'une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ ou d'un cercle de $\mathbb{C}$ selon que cette droite ou ce cercle passe ou ne passe pas par le point $\omega = -d/c$. [S]

IV. Homographies et conservation des angles

NB : à ce stade de l'année en MPSI, cette partie est hors-barême.

Dans cette partie, on se donne une homographie $h = h_{(a,b,c,d)}$.

Soit $\begin{cases} \gamma_1 : t \in I_1 \mapsto z_1(t) \\ \gamma_2 : t \in I_2 \mapsto z_2(t) \end{cases}$ deux arcs paramétrés de $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, sans points stationnaires.

On suppose que leurs supports ne contiennent pas $-d/c$.

On peut donc en composant par h définir les arcs paramétrés $\begin{cases} t \mapsto \Gamma_1(t) = h(z_1(t)) \\ t \mapsto \Gamma_2(t) = h(z_2(t)) \end{cases}$

1. Montrer que les arcs Γ_1 et Γ_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ et sans points stationnaires. [S]
2. Soit $A = z_1(t_1) = z_2(t_2)$ un point commun aux deux arcs paramétrés γ_1 et γ_2.

   Soit $B = Z_1(t_1) = Z_2(t_2)$ le point commun correspondant sur les arcs Γ_1 et Γ_2.

   Soit T_1 et T_2 les droites tangentes en A aux arcs γ_1 et γ_2.

   Soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les droites tangentes en B aux arcs Γ_1 et Γ_2.

   Montrer que l'angle de droites $(\widehat{T_1, T_2})$ est égal à l'angle de droites $(\widehat{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2})$.

   On exprimera cette propriété en écrivant qu'une homographie *conserve les angles*. [S]
3. On rappelle que deux cercles de $\mathbb{C}$ sont dits orthogonaux s'ils sont sécants et si les deux tangentes en l'un des points d'intersection sont orthogonales. On dira qu'une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ est orthogonale à un cercle de $\mathbb{C}$ si elle contient un diamètre de ce cercle.

   On peut donc parler de l'orthogonalité éventuelle de deux cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$.

   Avec ces définitions, déduire de ce qui précède que toute homographie transforme deux cercles orthogonaux de $\widehat{\mathbb{C}}$ en deux cercles orthogonaux de $\widehat{\mathbb{C}}$. [S]

V. Homographies et conservation de l'orthogonalité

On va montrer à nouveau que les homographies transforment les cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ en des cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$, et qu'elles conservent leur orthogonalité.

Contrairement à la méthode utilisée dans la partie IV, et qui utilisait des techniques de géométrie différentielle, on utilise ici une méthode purement algébrique.

On commence par le cas particulier de l'homographie $z \mapsto 1/z$, avant de généraliser.

1. Montrer qu'une partie Γ de $\mathbb{C}$ est un cercle ou une droite si et seulement si :
   $\exists\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, avec $\alpha\gamma < |\beta|^2$ tels que : $z \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha\,|z|^2 + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0$.
   On montrera qu'on obtient un cercle si $\alpha \neq 0$ et une droite si $\alpha = 0$. [S]
2. Retrouver le résultat II.2 disant que φ tranforme les cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ en des cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$. [S]
3. On se donne le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre ω_1 de rayon r_1, et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre ω_2 de rayon r_2.
   Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $|\omega_2 - \omega_1|^2 = r_1^2 + r_2^2$. [S]
4. On se donne deux droites ou cercles Γ et Γ' de $\mathbb{C}$ définis par les équations respectives :
   $\begin{cases} (E) : \alpha\,|z|^2 + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0 \\ (E') : \alpha'\,|z|^2 + \overline{\beta'} z + \beta' \overline{z} + \gamma' = 0 \end{cases}$, avec $\begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha\gamma < |\beta|^2 \\ \alpha'\gamma' < |\beta'|^2 \end{cases}$

   Montrer que Γ et Γ' sont orthogonaux si et seulement si $\alpha\gamma' + \alpha'\gamma = \beta\overline{\beta'} + \overline{\beta}\beta'$.

   (traiter le cas de deux cercles, puis de deux droites, puis d'une droite et d'un cercle.) [S]
5. En déduire que l'homographie $z \mapsto 1/z$ conserve l'orthogonalité des cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$.
   Généraliser ensuite à une homographie quelconque (utiliser III.3) [S]

VI. Homographies, disques et demi-plans

On reprend ici les notations et les résultats de la cinquième partie.

On sait donc qu'une homographie conserve l'ensemble des cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$. On va voir ici comment les homographies tranforment l'intérieur ou l'extérieur d'un cercle de $\mathbb{C}$, ou les deux demi-plans délimités par une droite de $\mathbb{C}$.

Comme dans la partie V, on commence par examiner le cas de l'homographie $z \mapsto 1/z$, avant de généraliser à une homographie quelconque.

Soit Γ une droite ou une cercle de $\mathbb{C}$.

On note $Q(z) = 0$ une équation de Γ, avec $Q(z) = \alpha\,|z|^2 + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma$ et $\begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R} \\ \alpha\gamma < |\beta|^2 \end{cases}$

Rappel : Γ est un cercle si $\alpha \neq 0$ et une droite sinon.

Quitte à considérer $-Q$ plutôt que Q, on suppose $\alpha \geq 0$.

1. Avec les notations précédentes, on définit les ensembles $\begin{cases} \Gamma^+ = \{z \in \mathbb{C},\ Q(z) > 0\} \\ \Gamma^- = \{z \in \mathbb{C},\ Q(z) < 0\} \end{cases}$

   Montrer que chacun de ces deux ensembles désigne :

   – Ou bien l'intérieur ou bien l'extérieur de Γ, si Γ est un cercle de $\mathbb{C}$.

   – Chacun des deux demi-plans de $\mathbb{C}$ définis par Γ, si Γ est une droite de $\mathbb{C}$. [S]

2. On pose $\varphi : z \mapsto 1/z$. On sait que $\widetilde{\Gamma} = \varphi(\Gamma)$ est un cercle ou une droite.

   Ecrire une équation $\widetilde{Q}(z) = 0$ de $\widetilde{\Gamma}$, facilement déduite de l'équation $Q(z) = 0$.

   En déduire que φ envoie respectivement les deux parties du plan séparées par Γ sur celles qui sont séparées par $\widetilde{\Gamma}$. [S]

3. Généraliser le résultat de la question précédente à une homographie quelconque.
   On pourra, si le temps le permet, donner quelques précisions supplémentaires. [S]

VII. Points fixes d'une homographie, birapport

– Soit f une application quelconque de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans lui-même.
  On dit qu'un élément z de $\widehat{\mathbb{C}}$ (éventuellement $z = \infty$) est un *point fixe* de f si $f(z) = z$.

– Soient z_1, z_2, z_3 trois éléments distincts de $\mathbb{C}$. Soit z un élément de $\widehat{\mathbb{C}}$.

  On pose $[\,z_1, z_2, z_3, z\,] = \dfrac{(z_3 - z_1)(z - z_2)}{(z_3 - z_2)(z - z_1)}$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1\}$, et $\begin{cases} [\,z_1, z_2, z_3, z_1\,] = \infty \\ [\,z_1, z_2, z_3, \infty\,] = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \end{cases}$

  Il est clair que l'application $z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$ est une homographie de $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. (a) En revenant aux définitions donnée en début d'énoncé, vérifier que les homographies qui ne possèdent que ∞ comme point fixe sont les similitudes. [S]

   (b) Montrer que toute homographie distincte de l'identité possède un ou deux points fixes (éventuellement confondus). [S]

2. Soit f une homographie distincte de l'identité. Montrer l'équivalence suivante :
   f est involutive $\Leftrightarrow \exists\,(u, v) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$ (avec $u \neq v$) tels que $f(u) = v$ et $f(v) = u$. [S]

3. Dans $\mathbb{C}$, soients z_1, z_2, z_3 (distincts deux à deux) et $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (distincts deux à deux.)
   Montrer qu'il existe une homographie h unique telle que $h(z_k) = \omega_k$ pour $1 \leq k \leq 3$.

   Indication : considérer les homographies $h : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$ et $k : z \mapsto [\omega_1, \omega_2, \omega_3, z]$.
   On s'intéressera aux images de z_1, z_2, z_3 (resp. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) par h (resp. k.) [S]

4. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre éléments distincts de $\mathbb{C}$ (avec éventuellement $z_4 = \infty$.)
La quantité $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est appelée *birapport* de z_1, z_2, z_3, z_4 (dans cet ordre.)
Montrer que z_1, z_2, z_3, z_4 sont sur un même cercle de $\widehat{\mathbb{C}} \Leftrightarrow [z_1, z_2, z_3, z_4]$ est un réel.
Indication : considérer l'homographie $h : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$. [S]

5. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre éléments distincts de $\mathbb{C}$ (avec éventuellement $z_4 = \infty$.)
Soit f une homographie de $\widehat{\mathbb{C}}$. On suppose que $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ sont distincts de ∞.
Montrer que $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.
On exprime cette propriété en disant qu'une homographie *conserve le birapport.*
Indication : Montrer que $f = h^{-1} \circ g$, avec $\begin{cases} g : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z] \\ h : z \mapsto [f(z_1), f(z_2), f(z_3), z] \end{cases}$ [S]

6. Réciproquement, on se donne une application f injective de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans lui-même.
On suppose que f conserve le birapport. Montrer que f est une homographie.
Indication :
– Se donner z_1, z_2, z_3 distincts dans $\mathbb{C}$, avec $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ distincts de ∞.
– Montrer que $f = h^{-1} \circ g$, avec $g : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$ et $h : z \mapsto [f(z_1), f(z_2), f(z_3), z]$. [S]

VIII. Conjugaison des homographies

On note $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{H}$ pour la loi de composition.

Pour tout homographie h, on note Φ_h l'application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ définie par $\Phi_h(f) = h \circ f \circ h^{-1}$.

On dit que deux homographies f et g sont *conjuguées* s'il existe h dans $\mathcal{H}$ telle que $g = \Phi_h(f)$.
On exprimera cette notation en écrivant $f \sim g$.

1. Dans cette question, on étudie l'application Φ définie sur $\mathcal{H}$ par $\Phi(h) = \Phi_h$.
   (a) Montrer que Φ est un morphisme de $\mathcal{H}$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$. [S]
   (b) On considère les éléments $t : z \mapsto z + 1$ et $s_a : z \mapsto 2a - z$ de $\mathcal{H}$ (avec $a \in \mathbb{C}$).
   Montrer que la seule homographie qui commute avec t et les s_a est l'identité. [S]
   (c) En déduire que le morphisme Φ est injectif. [S]

2. Dans cette question, on aborde l'étude de la relation *conjugaison* définie sur $\mathcal{H}$ par $f \sim g$.
   (a) Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence sur $\mathcal{H}$.
   Quelle est la classe d'équivalence de l'application identité ?
   Vérifier que si $f \sim g$ alors $f^n \sim g^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Montrer que deux homographies conjuguées ont exactement le même nombre de points fixes dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (un point fixe *double* n'étant compté qu'une fois.) [S]
   (c) Montrer que les translations distinctes de Id sont conjuguées deux à deux. [S]
   (d) Pour tout λ de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, on note σ_λ la similitude $z \mapsto \lambda z$.
   Montrer que σ_λ et σ_μ sont conjuguées si et seulement si $\mu = \lambda$ ou $\mu = \frac{1}{\lambda}$. [S]

3. Dans cette question, on va déterminer les différentes classes d'équivalence de $\mathcal{H}$ pour la relation de conjugaison, ainsi qu'un représentant simple de chaque classe.
   (a) Soit f une homographie ayant deux points fixes distincts α, β dans $\mathbb{C}$.
   On note h l'homographie définie par $z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (qu'on ne calculera pas) tel que $f = h^{-1} \circ \sigma_\lambda \circ h$. [S]
   (b) Soit f une similitude directe. On suppose que f n'est pas une translation.
   Soit α l'unique point fixe de f dans $\mathbb{C}$, et soit h l'application $z \mapsto z - \alpha$.
   Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tel que $f = h^{-1} \circ \sigma_\lambda \circ h$. [S]
   (c) Soit f une homographie ayant deux points fixes confondus en $\alpha \in \mathbb{C}$.
   On note h l'homographie définie par $h(z) = \frac{1}{z-\alpha}$.
   Montrer qu'il existe une translation t (distincte de Id) telle que $f = h^{-1} \circ t \circ h$. [S]
   (d) Déduire de ce qui précède le résultat suivant :
   – Si f n'a qu'un point double dans $\widehat{\mathbb{C}}$, elle est conjuguée à la translation $z \mapsto z + 1$.
   – Sinon il existe λ avec $0 < |\lambda| \leq 1$ tel que f soit conjuguée à $\sigma_\lambda : z \mapsto \lambda z$.
   On vérifiera que si $0 < |\lambda| < 1$, le coefficient λ est unique, alors que si $|\lambda| = 1$, il est unique à condition de supposer $\mathrm{Re}\,(\lambda) \geq 0$. [S]

IX. Puissances d'homographies

On va utiliser les résultats de la partie VIII (entre autres) pour étudier les puissances d'une homographie. Dans un premier temps, on va vérifier que les homographies dont une puissance est Id sont conjuguées à des rotations particulières. On étudie ensuite la suite définie par les images itérées d'un point de $\widehat{\mathbb{C}}$ par une homographie donnée. On terminera cette partie en se demandant s'il existe une homographie permutant circulairement n points donnés de $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. Dans cette question, on va obtenir des résultats sur les homographies dont une certaine puissance est l'application identité.
   (a) Soit f une homographie de $\widehat{\mathbb{C}}$ et n un entier naturel non nul.
   Montrer que $f^n = \mathrm{Id}$ si et seulement si f est conjuguée à σ_λ, avec $\lambda^n = 1$. [S]
   (b) Soit $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie ($f \neq \mathrm{Id}$).
   On note $f = h_u$, avec $u = (a, b, c, d)$.
   En utilisant uniquement la partie I, montrer que : $f^2 = \mathrm{Id} \Leftrightarrow d = -a$. [S]
   (c) Soient α, β deux éléments distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. En utilisant (3a), (3b) et (4) indiquer l'unique homographie involutive de $\widehat{\mathbb{C}}$ ayant pour points fixes α et β (on traitera d'abord le cas où α, β sont dans $\mathbb{C}$, puis on supposera $\beta = \infty$.) [S]
   (d) Comme précédemment, soient α, β deux éléments distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$.
   Trouver les deux seules homographies f qui sont distinctes de Id, qui vérifient $f^3 = 1$ et qui admettent α, β comme points fixes. [S]
   (e) Donner les trois homographies $f \neq \mathrm{Id}$ telles que $f^4 = \mathrm{Id}$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$.
   Si f_1, f_2, f_3 sont les solutions, vérifier que $\{\mathrm{Id}, f_1, f_2, f_3\}$ est un groupe cyclique. [S]

2. On va étudier s'il existe des homographies permutant circulairement 2, 3 ou 4 points.
   (a) Soient u, v deux points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$.
   Déterminer la forme générale des homographies f telles que $f(u) = v$ et $f(v) = u$.
   Indication : utiliser les résultats questions VII.2 et IX.1.b.
   On pourra supposer d'abord que u, v sont dans $\mathbb{C}$, puis que $v = \infty$. [S]
   (b) Soient u, v, w trois points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Montrer qu'il existe une unique homographie f telle que $f(u) = v$, $f(v) = w$, $f(w) = u$ et que cette application vérifie $f^3 = \mathrm{Id}$.
   Montrer que f laisse globalement invariant le cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par u, v, v.
   Déterminer l'unique homographie f telle que $f(0) = 1$, $f(1) = i$, $f(i) = 0$. [S]
   (c) On se donne quatre points distincts t, u, v, w dans $\widehat{\mathbb{C}}$.
   On cherche s'il existe f dans $\mathcal{H}$ telle que $f(t) = u$, $f(u) = v$, $f(v) = w$, $f(w) = t$.
   Montrer que si f existe, alors elle est unique et elle vérifie $f^4 = \mathrm{Id}$.
   Montrer que f existe si seulement si $[t, v, u, w] = -1$ (utiliser VII.6) [S]
3. Dans cette question on se donne une homographie $f \neq \mathrm{Id}$ et un élément z_0 de $\widehat{\mathbb{C}}$.
   On définit une suite de $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (a) On suppose que f ne possède qu'un seul point fixe α. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$. [S]
   (b) On suppose que f a deux points fixes distincts α et β, et que $z_0 \notin \{\alpha, \beta\}$.
   Montrer qu'on est dans l'une des trois situations suivantes :
   – Pour tout choix de z_0, la suite (z_n) converge vers α.
   – Pour tout choix de z_0, la suite (z_n) converge vers β.
   – Pour tout choix de z_0, la suite (z_n) diverge.
   Remarque : dans $\widehat{\mathbb{C}}$, on dit que la suite (z_n) converge vers ∞ si $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. [S]

X. Homographies envoyant un disque donné sur un disque donné

– On note $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$, $\quad\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\quad$ et $\quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

– On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des homographies $h : z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ (et $ad - bc \neq 0$.)
  On désigne par $\mathcal{R}^+$ celles de ces homographies qui vérifient $ad - bc > 0$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{R}^+$ est un sous-groupe de $\mathcal{R}$, lui-même un sous-groupe de $\mathcal{H}$. [S]
   (b) Montrer $\mathcal{R}$ est l'ensemble des homographies laissant $\widehat{\mathbb{R}}$ globalement invariant. [S]
   (c) Montrer $\mathcal{R}^+$ est l'ensemble des homographies laissant $\mathbb{P}$ globalement invariant. [S]
2. (a) Montrer que l'homographie $H : z \mapsto \dfrac{z - i}{z + i}$ vérifie $H(\mathbb{P}) = \mathbb{D}$. [S]
   (b) En déduire que les homographies f telles que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ sont les homographies qui sont données par $f : z \mapsto u\,\dfrac{z - \gamma}{1 - \overline{\gamma} z}$ avec $|u| = 1$ et $|\gamma| < 1$. [S]
   (c) Notons $\mathbb{D}_{\omega,r}$ le disque ouvert de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$.
   Déterminer les homographies h qui envoient $\mathbb{D}_{\omega,r}$ sur $\mathbb{D}_{\omega',r'}$. [S]

Corrigé du problème

I. Le groupe des homographies.

1. On se donne $u=(a,b,c,d)$ dans E et $v=(a',b',c',d')=\lambda u$, avec λ dans $\mathbb{C}^*$.
   Ainsi $a'=\lambda a,\ b'=\lambda b,\ c'=\lambda c,\ d'=\lambda d$, et $\delta(v)=\lambda^2\delta(u)\neq 0$ donc $v\in E$.
   Tout d'abord $h_v(\infty)=a'/c'=a/c=h_u(\infty)$.
   Ensuite $-d'/c'=-d/c$ donc $h_v(-d/c)=\infty=h_u(-d/c)$.
   Enfin, pour tout z de $\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$: $h_v(z)=\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}=\dfrac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d}=\dfrac{az+b}{cz+d}=h_u(z)$.
   Les deux applications h_u et h_v sont donc identiques.
   Si $u=(1,0,0,1)$ alors $h_u(z)=\dfrac{1z+0}{0z+1}=z$ pour tout z de $\mathbb{C}$, et $h_u(\infty)=\infty$.
   L'application $h_u=h_{(1,0,0,1)}$ est donc l'application identité de $\widehat{\mathbb{C}}$. [Q]
2. On pose $w=u\otimes v=(a'',b'',c'',d'')=(aa'+bc',ab'+bd',ca'+dc',cb'+dd')$.
   On constate que :
   $$\begin{aligned}\delta(w)&=a''d''-b''c''=(aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+dc')\\&=aa'dd'+bc'cb'-ab'dc'-bd'ca'=(ad-bc)(a'd'-b'c')=\delta(u)\delta(v)\neq 0\end{aligned}$$
   Autrement dit, $w=u\otimes v$ est encore un élément de E.
   On va maintenant montrer que $h_u\circ h_v=h_w$.
   Cas général : $h_u\circ h_v(z)=\dfrac{a\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}+d}=\dfrac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')}=\dfrac{a''z+b''}{c''z+d''}=h_w(z)$.
   On admet que ça reste vrai dans les cas où intervient ∞ (ni difficile ni passionnant.) [Q]
3. Soit $v=(a,b,c,d)$ dans E, et $v'=(a',b',c',d')=(d,-b,-c,a)$.
   On voit que v' est dans E car $\delta(v')=a'd'-b'c'=\delta(v)\neq 0$.
   D'après ce qui précède, on a $h_v\circ h_{v'}=h_w$, avec $w=v\otimes v'$.
   Or $v\otimes v'=(aa'+bc',ab'+bd',ca'+dc',cb'+dd')=(ad-bc,0,0,-cb+da)=(\delta(v),0,0,\delta(v))$.
   On en déduit que $h_v\circ h_{v'}=h_{(\delta(v),0,0,\delta(v))}=h_{(1,0,0,1)}=\mathrm{Id}$.
   L'application $\psi:(x,y,z,t)\mapsto(t,-y,-z,x)$ est une involution de $\mathbb{C}^4$ et $\begin{cases}v'=\psi(v)\\ v=\psi(v')\end{cases}$
   En inversant les rôles de v et v' on a donc $h_v\circ h_{v'}=\mathrm{Id}$.
   Il en découle que h_v est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$, et que $h_v^{-1}=h_{v'}$. [Q]
4. En fait $\mathcal{H}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{C}}),\circ)$ des bijections de $\widehat{\mathbb{C}}$.
   D'après ce qui précède $\mathcal{H}$ est en effet une partie (non vide) de $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{C}})$, stable pour la loi de composition et pour le passage à l'inverse. On remarque d'ailleurs que $h_{(1,0,0,1)}=\mathrm{Id}$.
   Pour montrer que le groupe $\mathcal{H}$ n'est pas commutatif, il suffit d'exhiber un exemple.
   Si $u=(1,1,1,0)$, alors $h_u(z)=z+1$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
   Si $v=(2,0,1,0)$, alors $h_v(z)=2z$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
   Pour tout z de $\mathbb{C}$: $\begin{cases}h_v\circ h_u(z)=2(z+1)\\ h_u\circ h_v(z)=2z+1\end{cases}$ donc $h_u\circ h_v\neq h_v\circ h_u$. [Q]

II. L'homographie $z \mapsto 1/z$ et les cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. (a) L'élément $z = \omega$ est sur Δ et il vérifie bien $\text{Re}\,((z-\omega)\,\overline{\omega}) = 0$.

   Considérons donc un élément z quelconque de $\mathbb{C}$, mais distinct de ω.

   On a $\text{Re}\,((z-\omega)\,\overline{\omega}) = 0 \Leftrightarrow \arg((z-\omega)\,\overline{\omega}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow \arg(z-\omega) = \arg\omega + \frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

   Cela signifie que l'angle $\widehat{0\omega z}$ est droit, c'est-à-dire que z est sur Δ. [Q]

   (b) Les éléments $z = u$ et $z = v$ sont sur $\mathcal{C}$ et ils vérifient bien $\text{Re}\,((z-u)\,(\overline{z}-\overline{v})) = 0$.

   Considérons donc un élément z quelconque de $\mathbb{C}$, mais distinct de u et v.

   On a $\text{Re}\,((z-u)\,(\overline{z}-\overline{v})) = 0 \Leftrightarrow \arg(z-u) = \arg(z-v) + \frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

   Cela signifie que l'angle $\widehat{uzv}$ est droit, c'est-à-dire que z est sur $\mathcal{C}$.

   Si on souhaite ne pas utiliser cette caractérisation pourtant classique des cercles, voici comment on peut s'y prendre, avec z quelconque dans $\mathbb{C}$:

   $$\begin{aligned}&\text{Re}\,((z-u)\,(\overline{z}-\overline{v})) = 0 \Leftrightarrow (z-u)\,(\overline{z}-\overline{v}) + (\overline{z}-\overline{u})\,(z-v) = 0\\ &\quad\Leftrightarrow |z|^2 - \text{Re}\,((u+v)\overline{z}) + \text{Re}\,(u\overline{v}) = 0\\ &\quad\Leftrightarrow \left|z - \tfrac{u+v}{2}\right|^2 = \left|\tfrac{u+v}{2}\right|^2 - \text{Re}\,(u\overline{v}) = \left|\tfrac{v-u}{2}\right|^2 \Leftrightarrow \left|z - \tfrac{u+v}{2}\right| = \left|\tfrac{v-u}{2}\right|\end{aligned}$$

   On obtient bien le cercle $\mathcal{C}$, qui a pour centre $\frac{u+v}{2}$ et pour rayon $\left|\frac{v-u}{2}\right|$. [Q]

2. On a $\varphi(z) = 1/z$ pour tout z de $\mathbb{C}^*$, puis $\varphi(0) = \infty$ et $\varphi(\infty) = 0$.

   On remarque que $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$. L'application φ est donc une involution de $\widehat{\mathbb{C}}$.

   Pour toute partie X de $\widehat{\mathbb{C}}$, on a donc $z \in \varphi(X) \Leftrightarrow z \in \varphi^{-1}(X) \Leftrightarrow \varphi(z) \in X$.

   (a) Soit $\widehat{D}$ une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par l'origine.

   Il existe ω dans $\mathbb{C}^*$ tel que $\widehat{D} = \{\infty\} \cup D$, avec $D = \{\lambda\omega,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   On a $\varphi(\infty) = 0$ et $\varphi(0) = \infty$, donc $\varphi(\widehat{D}) = \{0, \infty\} \cup \{\varphi(\lambda\,\omega),\ \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

   Mais quand λ parcourt $\mathbb{R}^*$, $\varphi(\lambda\,w) = \dfrac{1}{\lambda\,\omega} = \dfrac{\overline{\omega}}{\lambda\,|\omega|^2}$ parcourt $\{\mu\,\overline{\omega},\ \mu \in \mathbb{R}^*\}$.

   On en déduit $\varphi(\widehat{D}) = \overline{\Delta} = \{\infty\} \cup \Delta$, avec $\Delta = \{\mu\,\overline{\omega},\ \mu \in \mathbb{R}\}$.

   $\varphi(\widehat{D})$ est donc la droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par 0 *symétrique* de $\widehat{D}$ par rapport à Ox. [Q]

   (b) Soit ω (élément de $\mathbb{C}^*$) le point diamétralement opposé à 0 sur le cercle $\mathcal{C}$.

   Soit $\mathcal{C}'$ le cercle $\mathcal{C}$ privé de l'origine. On a $\varphi(\mathcal{C}) = \{\infty\} \cup \varphi(\mathcal{C}')$, et $\varphi(\mathcal{C}') \subset \mathbb{C}^*$.

   Pour tout z de $\mathbb{C}^*$:

   $$\begin{aligned} z \in \varphi(\mathcal{C}') \quad &\Leftrightarrow \varphi(z) \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow \text{Re}\left(\left(\frac{1}{z} - \omega\right)\frac{1}{\overline{z}}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\left(\frac{1 - z\omega}{|z|^2}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \text{Re}\left(\frac{1 - z\omega}{|\omega|^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\left(\left(z - \frac{1}{\omega}\right)\frac{1}{\overline{\omega}}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\,((z-\omega')\,\overline{\omega'}) = 0\end{aligned}$$

   D'après II.1.a, c'est la droite Δ de $\mathbb{C}$, orthogonale en $\omega' = \varphi(\omega)$ au segment $[0, \omega']$.

   Ainsi $\varphi(\mathcal{C}) = \widehat{\Delta} = \{\infty\} \cup \Delta$ est une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ ne passant pas par 0. [Q]

(c) Soit Δ une droite de $\mathbb{C}$ ne passant par par 0, et soit $\widehat{\Delta} = \{\infty\} \cup \Delta$.

Soit ω' la projection de l'origine sur Δ. Soit $\omega = \varphi(\omega')$, donc $\omega' = \varphi(\omega)$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par 0 et de diamètre $[0, \omega]$.

On sait depuis la question précédente que $\varphi(\mathcal{C}) = \widehat{\Delta} = \{\infty\} \cup \Delta$.

Mais puisque φ est involutive, on a $\varphi(\widehat{\Delta}) = \varphi^{-1}(\widehat{\Delta}) = \mathcal{C}$.

Ainsi l'image de $\widehat{\Delta}$ est le cercle $\mathcal{C}$, qui passe par l'origine. [Q]

(d) Soit $\mathcal{C}$ un cercle ne passant pas par O. On a bien sûr $\varphi(\mathcal{C}) \subset \mathbb{C}^*$.

Soient u et v deux points diamétralement opposés et alignés avec 0.

Si le cercle $\mathcal{C}$ n'est pas centré en 0, il n'y a qu'un diamètre possible, sinon tout diamètre convient. D'autre part, il existe λ dans $\mathbb{R}^*$ tel que $v = \lambda u$.

On a : $z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left((z-u)(\overline{z}-\overline{v})\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left((z-u)(\overline{z}-\lambda\overline{u})\right) = 0$.

On trouve donc successivement :

$$\begin{aligned} z \in \varphi(\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \varphi(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{z} - u\right)\left(\frac{1}{\overline{z}} - \lambda\overline{u}\right)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{\lambda\,|u|^2}{|z|^2}\left(\frac{1}{u} - z\right)\left(\frac{1}{\lambda\overline{u}} - \overline{z}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\left(z - \frac{1}{u}\right)\left(\overline{z} - \frac{1}{\overline{v}}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(\mathcal{C})$ est le cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[u', v']$ avec $u' = \varphi(u)$ et $v' = \varphi(v)$.

Puisque $\mathcal{C}$ ne contient par ∞, le cercle $\mathcal{C}' = \varphi(\mathcal{C})$ ne passe pas par 0. [Q]

3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle quelconque de $\widehat{\mathbb{C}}$ (donc éventuellement une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$).

On sait que $\varphi(\mathcal{C})$ est un cercle $\mathcal{C}'$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ (par exemple une droite...)

Ainsi φ est une application de $\widehat{\mathcal{C}}$ dans lui-même.

Cette application est involutive car pour toute partie X de $\widehat{\mathbb{C}}$, on a $\varphi(\varphi(X)) = X$.

Ainsi φ réalise une bijection (involutive) de $\widehat{\mathcal{C}}$ sur lui-même. [Q]

III. Homographies et cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. Tout d'abord $\mathcal{S}$ est une partie (non vide) de $\mathcal{H}$.

Cela résulte de la définition $s_{a,b} = h_{(a,b,0,1)}$ et du fait que $\delta(a,b,0,1) = a \neq 0$.

On se donne (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Posons $u = (a,b,0,1)$ et $v = (c,d,0,1)$.

On sait depuis I.2 que $s_{a,b} \circ s_{c,d} = s_w$ avec $w = u \otimes v = (ac, ad+b, 0, 1)$.

On en déduit que $s_{a,b} \circ s_{c,d} = s_{e,f}$ avec $e = ac \neq 0$ et $f = ad + b$.

Il en découle que $\mathcal{S}$ est une partie stable du groupe $\mathcal{H}$.

On sait depuis que I.3 que $s_{a,b}^{-1} = h_{u'}$, avec $u' = (1, -b, 0, a)$.

Mais $u' = au''$ avec $u'' = (1/a, -b/a, 0, 1)$, et $s_{a,b}^{-1} = h_{u'} = h_{u''}$ (cf I.1)

Ainsi $s_{a,b}^{-1}$ est encore un élément de $\mathcal{S}$, qui est donc stable par passage à l'inverse.

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc un sous-groupe de $\mathcal{H}$ (caractérisation des sous-groupes.)

Remarque : l'application $s_{a,b}$ est définie par $s_{a,b}(z) = az+b$ sur $\mathbb{C}$ et par $s_{a,b}(\infty) = \infty$. On aurait pu utiliser ces expressions pour montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}$. [Q]