Applications linéaires

Enoncés

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme :

$$Q=2P(X)+(2-3X)P'(X)+(2X^2-X+1)P''(X).$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Ecrire la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. f est-il bijectif ?

c) Déterminer une base de Kerf et une base de Imf .

2) Pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})(n\in\mathbb{N}^*), A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, on définit l'application trace, notée tr par :

$$trA=\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

a) Montrer que tr est une forme linéaire. Est-elle bijective pour $n\in[\![2,+\infty[\![$?

b) Soient n un entier naturel non nul et $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Vérifier que : $trA=tr({}^tA)$ et montrer que $trAB=trBA$.

En déduire que l'équation $AB-BA=I$ n'admet pas de solution.

3) Soit u un endomorphisme défini sur un espace vectoriel.

a) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}$, Ker $u^k \subset$ Ker u^{k+1}.

b) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}$, Im $u^{k+1} \subset$ Im u^k.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Correction

1) a) ❑ On a :

$\forall(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}_3[X])^2,\ \varphi(\lambda P+Q) = 2(\lambda P+Q)(X)+(2-3X)(\lambda P+Q)'(X)+(2X^2-X+1)(\lambda P+Q)''(X)$

soit :

$= 2\lambda P(X)+2Q(X)+(2-3X)(\lambda P'(X)+Q'(X))+(2X^2-X+1)(\lambda P''(X)+Q''(X))$

soit encore :

$=\lambda(2P(X)+(2-3X)P'(X)+(2X^2-X+1)P''(X))$

$+(2Q(X)+(2-3X)Q'(X)+(2X^2-X+1)Q''(X))$ et donc :

$\forall(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}_3[X])^2,\ \varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.

f est donc une application linéaire.

❑ Soit maintenant $P\in\mathbb{R}_3[X]$. On peut alors écrire : $P'\in\mathbb{R}_2[X]$ et $P''\in\mathbb{R}_1[X]$, d'où :

$(2-3X)P'(X)\in\mathbb{R}_3[X]$ et $(2X^2-X+1)P''(X)\in\mathbb{R}_3[X]$, et donc :

$(2P(X)+(2-3X)P'(X)+(2X^2-X+1)P''(X))\in\mathbb{R}_3[X]$, i.e. : $f(P)\in\mathbb{R}_3[X]$.

f est donc une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

❑ On peut maintenant conclure :

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

b) On trouve, après calculs :

- $f(1)=2$,
- $f(X)=2-X$,
- $f(X^2)=2X+2$,
- $f(X^3)=5X^3+6X$.

On en déduit alors la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$M=\begin{pmatrix}2&2&2&0\\0&-1&2&6\\0&0&0&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

Comme M comporte une ligne nulle, elle est non inversible, et donc :

f n'est pas bijectif

N.B. : on pouvait également remarquer que M est triangulaire, avec un terme nul sur sa diagonale.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.