



Applications linéaires

Enoncés

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme :

$$Q = 2P(X) + (2 - 3X)P'(X) + (2X^2 - X + 1)P''(X).$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Ecrire la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. f est-il bijectif ?
- Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.

2) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on définit l'application trace, notée tr par :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

- Montrer que tr est une forme linéaire. Est-elle bijective pour $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$?
- Soient n un entier naturel non nul et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Vérifier que : $\text{tr } A = \text{tr}({}^t A)$ et montrer que $\text{tr } AB = \text{tr } BA$.

En déduire que l'équation $AB - BA = I$ n'admet pas de solution.

3) Soit u un endomorphisme défini sur un espace vectoriel.

- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$.
- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Im } u^{k+1} \subset \text{Im } u^k$.

Correction

1) a) On a :

$$\forall (\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_3[X])^2, \varphi(\lambda P + Q) = 2(\lambda P + Q)(X) + (2 - 3X)(\lambda P + Q)'(X) + (2X^2 - X + 1)(\lambda P + Q)''(X)$$

soit :

$$= 2\lambda P(X) + 2Q(X) + (2 - 3X)(\lambda P'(X) + Q'(X)) + (2X^2 - X + 1)(\lambda P''(X) + Q''(X))$$

soit encore :

$$= \lambda(2P(X) + (2 - 3X)P'(X) + (2X^2 - X + 1)P''(X)) \\ + (2Q(X) + (2 - 3X)Q'(X) + (2X^2 - X + 1)Q''(X))$$

et donc :

$$\forall (\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_3[X])^2, \varphi(\lambda P + Q) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q).$$

f est donc une application linéaire.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On peut alors écrire : $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_1[X]$, d'où :

$$(2 - 3X)P'(X) \in \mathbb{R}_3[X] \text{ et } (2X^2 - X + 1)P''(X) \in \mathbb{R}_3[X], \text{ et donc :}$$

$$(2P(X) + (2 - 3X)P'(X) + (2X^2 - X + 1)P''(X)) \in \mathbb{R}_3[X], \text{ i.e. : } f(P) \in \mathbb{R}_3[X].$$

f est donc une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

On peut maintenant conclure :

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

b) On trouve, après calculs :

- $f(1) = 2$,
- $f(X) = 2 - X$,
- $f(X^2) = 2X + 2$,
- $f(X^3) = 5X^3 + 6X$.

On en déduit alors la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Comme M comporte une ligne nulle, elle est non inversible, et donc :

f n'est pas bijectif

N.B. : on pouvait également remarquer que M est triangulaire, avec un terme nul sur sa diagonale.