Espaces vectoriels

Familles libres, génératrices, bases

Enoncé

1) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note le $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini par :

$$E = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}), \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, M = aA + bB + cC \right\}.$$

Déterminer une base et la dimension de E.

2) Montrer que la famille $(1, X(X-1), X^2(X+1), X(X-1)^2)$ est libre.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x \mapsto x^k \ln^{n-k} x)_{0 \le k \le n}$ est libre.

4) Soit n un entier naturel non nul, $(x_k)_{1 \le k \le n}$ une suite de nombres réels distincts et $(L_i)_{1 \le i \le n}$ la suite de polynômes définis par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$$

Montrer que la famille $(L_i)_{1 \le i \le n}$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis donner l'expression de tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE