FONCTIONS DE TRANSFERT – FILTRAGE

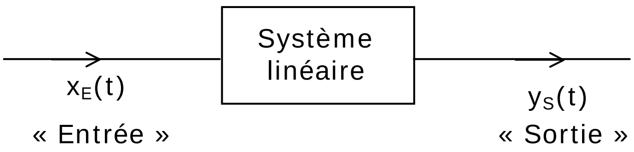
Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

I. Fonction de transfert.

Soit un circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé. Nous étudierons désormais ce circuit sous l'œil de la « commande » : on lui applique une « grandeur d'entrée » $x_E(t)$ (tension ou courant en électronique), et on s'intéresse à une « grandeur de sortie » $y_S(t)$ (tension ou courant également en électronique).



On peut alors définir un système linéaire d'ordre n par un système tel que la relation x_E/y_S soit une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants. On montre alors que le 2e membre de l'équation peut se mettre sous forme d'une combinaison linéaire de x_E et de ses dérivées successives jusqu'à un ordre m :

$$\boxed{a_n\, \underline{y_S}^{(n)} + \ldots + a_1\, \dot{\underline{y_S}} + a_0\, \underline{y_S} = b_0\, \underline{x_E} + b_1\, \dot{\underline{x_E}} + \ldots + b_m\, x_E^{(m)}}$$

I.1. Définition :

I.1. Définition : l'équation différentielle ci-dessus peut s'écrire en notation complexe :

$$a_n\, \underline{y_S}^{(n)} + \ldots + a_1\, \dot{\underline{y_S}} + a_0\, \underline{y_S} = b_0\, \underline{x_E} + b_1\, \dot{\underline{x_E}} + \ldots + b_m\, \underline{x_E}^{(m)}$$

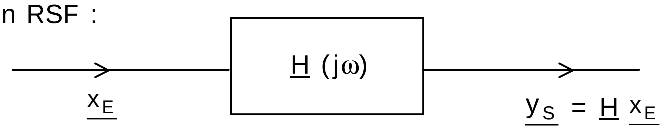
Soit :

$$\underline{y_S}\,(a_0 + a_1\,(j\omega) + \ldots a_n\,(j\omega)^n) = \underline{x_E}\,(b_0 + b_1\,(j\omega) + \ldots b_m\,(j\omega)^m)$$

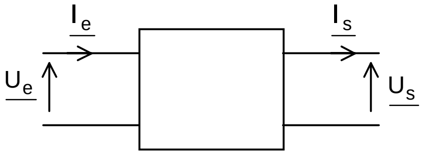
On passe alors :

$$\boxed{\underline{H}\,(j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \ldots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \ldots + a_n(j\omega)^n}}$$

$\underline{H}$ (jω) est appelée fonction de transfert du système linéaire, puisque $\underline{y_S}$ et $\underline{x_E}$ sont proportionnels, en RSF :



Rem. : on représente en général un système linéaire en RSF sous forme d'un quadrupôle :

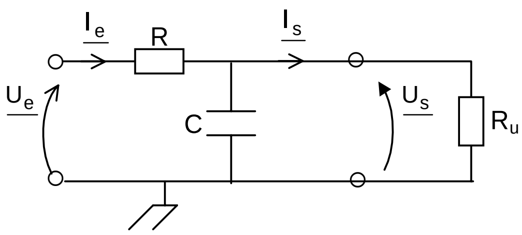


On peut alors définir 4 fonctions de transferts :

- $\dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$: « amplification » en tension (sans dimension)
- $\dfrac{\underline{I_s}}{\underline{I_e}}$: « amplification » en courant (sans dimension)
- $\dfrac{\underline{U_s}}{\underline{I_e}}$: « transimpédance » (en Ω)
- $\dfrac{\underline{I_s}}{\underline{U_e}}$: « transadmittance » (en S)

On notera de plus qu'une fonction de <u>transfert n'est pas une grandeur intrinsèque</u> au quadripôle, <u>mais dépend de sa « charge</u> ».

Ex. :



$$\begin{cases} * \quad \underline{H} = \dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{« à vide » (si } I_s = 0 \text{ ou } R_u \to \infty) \\ * \quad \underline{H} = \dfrac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \quad \text{sinon} \qquad , \text{ où } \underline{Z} = \dfrac{R_u}{1 + j R_u C\omega} \end{cases}$$

I.2. Lien $\underline{H}$ / équation différentielle.

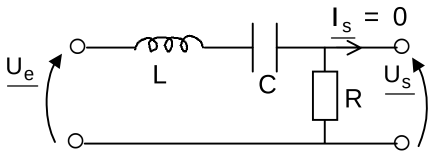
On voit que $\underline{H}$ (jω) est une fraction rationnelle d'ordre n en p = jω.

*Les coefficients de $\underline{H}$ sont ceux de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} 1^{er} \text{ membre} <-> \text{dénominateur} \\ 2^{e} \text{ membre} <-> \text{numérateur} \end{cases}$$

On peut ainsi, inversement, « remonter » à l'équation différentielle x_E/y_S à partir de la fonction de transfert.

Ex :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{U_s}\,(1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC) = j\omega RC\, \underline{U_e}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{LC\,\ddot{u}_s + RC\,\dot{u}_s + u_s = RC\,\dot{u}_e}$$

(et cette équation différentielle est alors valable, $\forall u_E$, même non sinusoïdale bien sûr).

*En posant $p = j\omega$, les pôles de H(p) vérifient : $a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n = 0$.

Cette équation est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Ainsi :

<u>p_i , pôles de H (p) = racines équation caractéristique</u>

Pour un SL passif, ou actif stable :

$$\underline{R_e(P_i) < 0}$$

*Pour $\omega = 0$: $\underline{H}(o) = H_o = \dfrac{b_0}{a_0}$ est appelé <u>transfert statique</u>.

Si alors, pour $t > 0$: $x_E = 1$:

$$a_n\, y_S^{(n)} + ... + a_1\, \dot{y}_S + a_0\, y_S = b_0$$

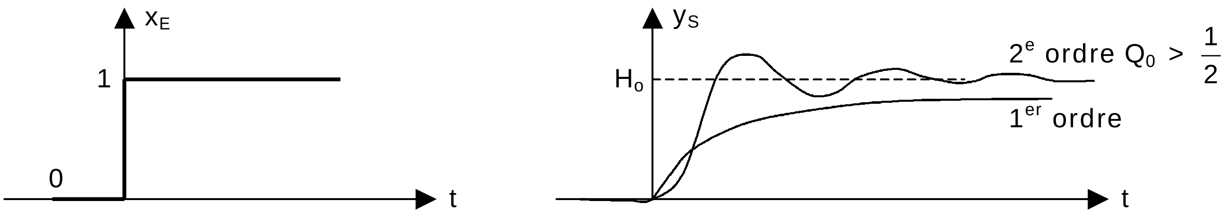
$$\Rightarrow \quad y_S(t) = \underbrace{\text{SGESSM}}_{\substack{\to 0 \\ \text{si } t \to \infty}} + \frac{b_0}{a_0}$$

On voit donc que :

$$\boxed{H_o = H(p = o) = \lim_{t \to +\infty} y_S(t) \quad \text{si } x_E = 1}$$

En électronique, la réponse à un échelon unité est appelée « <u>réponse indicielle</u> ». Donc :

transfert statique = réponse indicielle en régime permanent



*On montre de même (admis) que :

$$\boxed{\lim_{p \to \infty} H(p) = y_S(0^+) \text{ si } x_E = 1}$$

Rem. : on aura toujours $m \leq n$, sinon :

$\begin{cases} H \to \infty \\ \omega \to \infty \end{cases}$, donc $\begin{cases} y_S \to \infty \\ \omega \to \infty \end{cases}$, ce qui est

exclu pour X_e borné et un système linéaire passif ou actif stable.

I.3. Intérêt de $\underline{H}$

Posons :
$$\begin{cases} x_E(t) = X_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_E) <-> \underline{X_E} = x_e \sqrt{2}\, e^{j(\omega t + \varphi_E)} \\ Y_S(t) = Y_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_S) <-> \underline{Y_s} = Y_s \sqrt{2}\, e^{j(\omega t + \varphi_S)} \end{cases}$$

Alors :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{\underline{y_s}}{\underline{x_e}} = \frac{y_s}{x_e} e^{(\varphi_S - \varphi_E)}$$

Si on pose : $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$, on voit que :

$$\boxed{\begin{cases} |\underline{H}| = H(\omega) = \dfrac{Y_s}{X_e} \\ \text{Arg } \underline{H} = \varphi(\omega) = \varphi_S - \varphi_E = \text{déphasage sortie/entrée} \end{cases}}$$

Ainsi, la connaissance de $\underline{H}(j\omega)$ permet de connaître parfaitement la sortie y_S pour une entrée x_E donnée (son amplitude et sa phase à l'origine), pour toute valeur de ω.

I.4. Représentations de $\underline{H} = H(\omega)\ e^{j\varphi(\omega)}$

*<u>Diagrammes linéaires</u> : on trace $H(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

<u>Inconvénient</u> : en électronique, on couvre en général une large plage de fréquences (en TP, avec du matériel de base, on peut couvrir la plage 100 Hz → 100 kHz), et ce mode de représentation est donc peu pratique et peu utilisé.

*<u>Diagramme de Bode</u> : il s'agit d'utiliser une <u>échelle logarithmique</u> en abscisse (pour les raisons invoquées ci-dessus).

On définit de plus :

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log H}$$, gain en décibels

(uniquement si $H = \dfrac{U_s}{U_e}$ ou $H = \dfrac{I_s}{I_e}$ est sans dimension).

Le diagramme de Bode est alors le tracé des 2 courbes :

et

<u>Rem.</u> : • On trace en général un diagramme de Bode sur du papier « semi-logarithmique » (avec une échelle logarithmique).

- $\log \omega \to -\infty$: un diagramme de Bode ne « s'arrête pas » à $\log \omega = 0$.
  $\omega \to 0$

- Si $\underline{H} = \underline{H}_1\ \underline{H}_2$ $\begin{cases} G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$:

on peut alors sommer les deux diagrammes de Bode de $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$ pour obtenir celui de $\underline{H}$.

- $\begin{cases} G_{dB} = 0 \Leftrightarrow H = 1 \\ G_{dB} < 0 \Leftrightarrow H < 1 \\ G_{dB} > 0 \Leftrightarrow H > 1 \end{cases}$

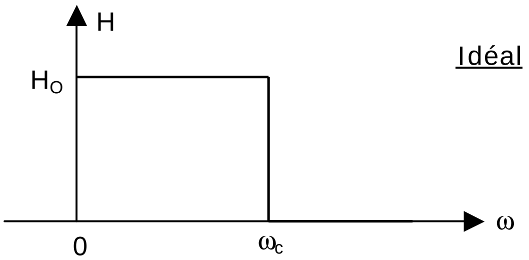
$$\begin{cases} H = 10 \Leftrightarrow G_{dB} = 20 \\ H = 10^2 \Leftrightarrow G_{dB} = 40 \\ \quad\vdots \\ H = 10^{-1} \Leftrightarrow G_{dB} = -20 \\ H = 10^{-2} \Leftrightarrow G_{dB} = -40 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

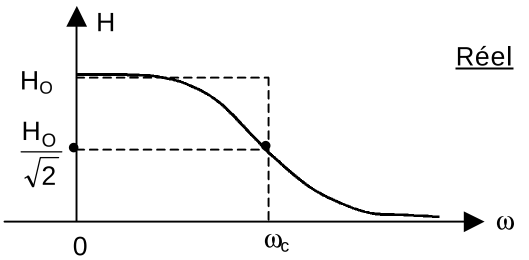
II. Filtrage.

En électronique, un « filtre » est un système linéaire qui transmet (le plus parfaitement possible) certaines fréquences et atténue (le plus possible) les autres.

Il est caractérisé par sa « bande passante », bande de fréquences (ou de pulsations) transmise par le filtre : $[\omega_{c_1}, \omega_{c_2}]$ ou $\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}$. ω_{c_1} et ω_{c_2} sont les « pulsations de coupure ».

II.1. Filtre passe-bas.



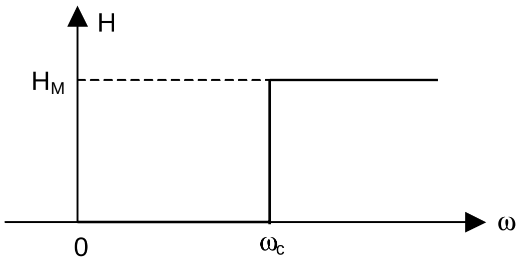


Par convention, on définit la « <u>bande passante à –3 dB</u> », c'est-à-dire les pulsations de coupure à –3 dB telles que :

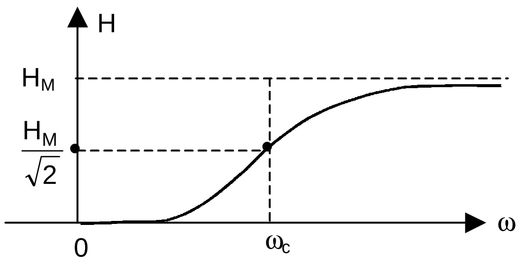
$$H(\omega_c) = \frac{H_{Max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad G(\omega_c) = G_{Max} - 3 \text{ dB}$$

II.2. Filtre passe-haut.

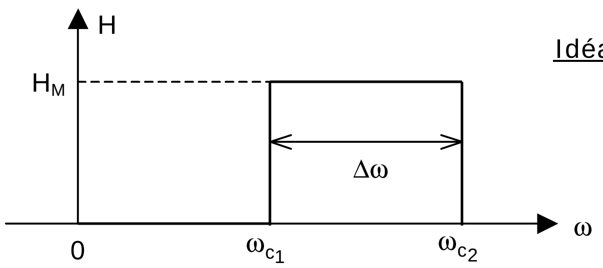


Idéal

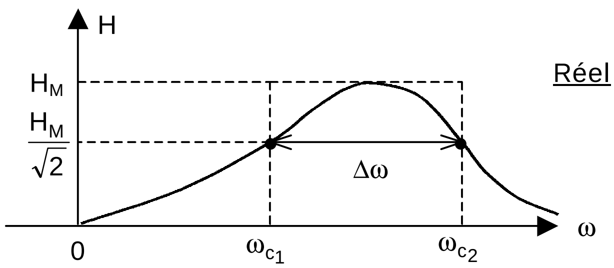


Réel

II.3. Filtre passe-bande :



Idéal



Réel

II.4. Filtre « réjecteur de bande ».