

## FONCTIONS DE TRANSFERT – FILTRAGE

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

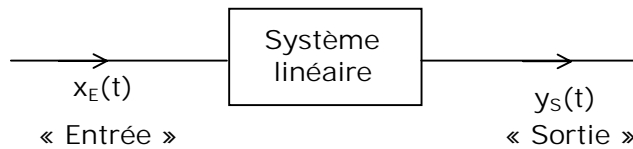
\*\*\*\*\*

I.	Fonction de transfert. ....	1
II.	Filtrage. ....	6
III.	Filtres du 1 <sup>er</sup> ordre. ....	8
IV.	Filtres du 2 <sup>e</sup> ordre. ....	11

\*\*\*\*\*

### I. Fonction de transfert.

Soit un circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé. Nous étudierons désormais ce circuit sous l’œil de la « commande » : on lui applique une « grandeur d’entrée »  $x_E(t)$  (tension ou courant en électronique), et on s’intéresse à une « grandeur de sortie »  $y_S(t)$  (tension ou courant également en électronique).



On peut alors définir un système linéaire d’ordre  $n$  par un système tel que la relation  $x_E/y_S$  soit une équation différentielle linéaire d’ordre  $n$  à coefficients constants. On montre alors que le 2<sup>e</sup> membre de l’équation peut se mettre sous forme d’une combinaison linéaire de  $x_E$  et de ses dérivées successives jusqu’à un ordre  $m$  :

$$a_n \underline{y_S}^{(n)} + \dots + a_1 \underline{y_S}^{(1)} + a_0 \underline{y_S} = b_0 \underline{x_E} + b_1 \underline{\dot{x_E}} + \dots + b_m \underline{x_E}^{(m)}$$

**I.1. Définition :** l’équation différentielle ci-dessus peut s’écrire en notation complexe :

$$a_n \underline{y_S}^{(n)} + \dots + a_1 \underline{y_S}^{(1)} + a_0 \underline{y_S} = b_0 \underline{x_E} + b_1 \underline{\dot{x_E}} + \dots + b_m \underline{x_E}^{(m)}$$

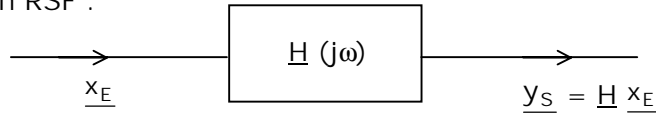
Soit :

$$\underline{y_S} (a_0 + a_1 (j\omega) + \dots + a_n (j\omega)^n) = \underline{x_E} (b_0 + b_1 (j\omega) + \dots + b_m (j\omega)^m)$$

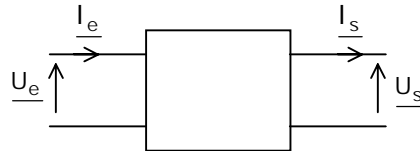
On passe alors :

$$\underline{H} (j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{b_0 + b_1 (j\omega) + \dots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 (j\omega) + \dots + a_n (j\omega)^n}$$

$\underline{H}(j\omega)$  est appelée fonction de transfert du système linéaire, puisque  $\underline{y}_S$  et  $\underline{x}_E$  sont proportionnels, en RSF :



Rem. : on représente en général un système linéaire en RSF sous forme d'un quadripôle :

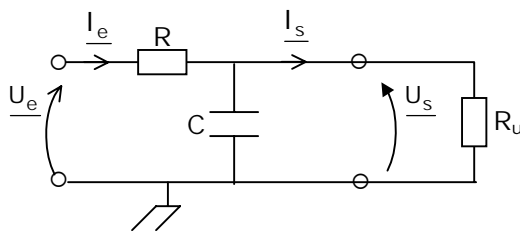


On peut alors définir 4 fonctions de transferts :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_s}{U_e} : \text{« amplification » en tension (sans dimension)} \\ \frac{I_s}{I_e} : \text{« amplification » en courant (sans dimension)} \\ \frac{U_s}{I_e} : \text{« transimpédance » (en } \Omega \text{)} \\ \frac{I_s}{U_e} : \text{« transadmittance » (en S)} \end{array} \right.$$

On notera de plus qu'une fonction de transfert n'est pas une grandeur intrinsèque au quadripôle, mais dépend de sa « charge ».

Ex. :



$$\left\{ \begin{array}{l} * \underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \text{ « à vide » (si } I_s = 0 \text{ ou } R_u \rightarrow \infty) \\ * \underline{H} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \text{ sinon, où } \underline{Z} = \frac{R_u}{1 + jR_u C \omega} \end{array} \right.$$

### 1.2. Lien $\underline{H}$ / équation différentielle.

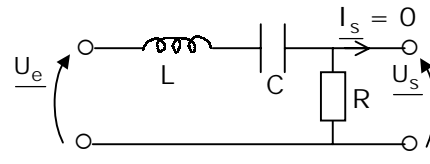
On voit que  $\underline{H}(j\omega)$  est une fraction rationnelle d'ordre n en  $p = j\omega$ .

\*Les coefficients de  $\underline{H}$  sont ceux de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} 1^{\text{er}} \text{ membre} \leftrightarrow \text{dénominateur} \\ 2^{\text{e}} \text{ membre} \leftrightarrow \text{numérateur} \end{cases}$$

On peut ainsi, inversement, « remonter » à l'équation différentielle  $x_E/y_S$  à partir de la fonction de transfert.

EX :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_s (1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC) = j\omega RC \underline{U}_e$$

$$\Leftrightarrow \boxed{LC \overset{00}{u}_s + RC \overset{0}{u}_s + u_s = RC \overset{0}{u}_e}$$

(et cette équation différentielle est alors valable,  $\forall u_E$ , même non sinusoïdale bien sûr).

\*En posant  $p = j\omega$ , les pôles de  $H(p)$  vérifient :  $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n = 0$ .

Cette équation est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Ainsi :

$p_i$ , pôles de  $H(p)$  = racines équation caractéristique

Pour un SL passif, ou actif stable :

$$\underline{Re}(P_i) < 0$$

\*Pour  $\omega = 0$  :  $\underline{H}(0) = H_0 = \frac{b_0}{a_0}$  est appelé transfert statique.

Si alors, pour  $t > 0$  :  $x_E = 1$  :

$$a_n y_S^{(n)} + \dots + a_1 \overset{0}{y}_S + a_0 y_S = b_0$$

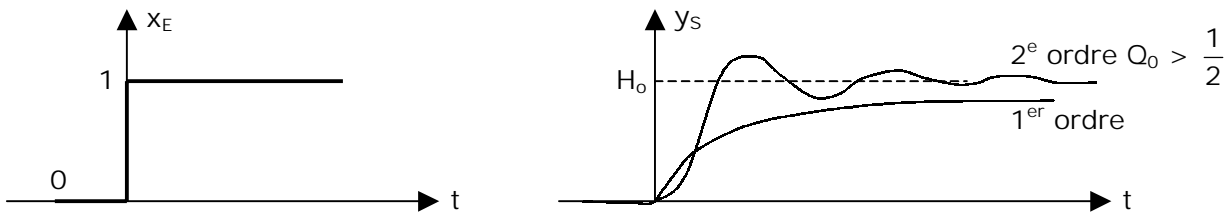
$$\Rightarrow y_S(t) = \underbrace{\text{SGESSM}}_{\rightarrow 0} + \frac{b_0}{a_0}$$

si  $t \rightarrow \infty$

On voit donc que :

$$\boxed{H_0 = H(p = 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_S(t) \quad \text{si } x_E = 1}$$

En électronique, la réponse à un échelon unité est appelée « réponse indicielle ». Donc :  
transfert statique = réponse indicielle en régime permanent



\*On montre de même (admis) que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H(p) = y_S(0^+) \text{ si } x_E = 1$$

Rem. : on aura toujours  $m \leq n$ , sinon :

$$\begin{cases} H \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} y_S \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty \end{cases}, \text{ ce qui est}$$

exclu pour  $X_e$  borné et un système linéaire passif ou actif stable.

### 1.3. Intérêt de $\underline{H}$

Posons :

$$\begin{cases} x_E(t) = X_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_E) \leftrightarrow \underline{x_E} = X_e \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_E)} \\ y_S(t) = Y_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_S) \leftrightarrow \underline{y_S} = Y_s \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_S)} \end{cases}$$

Alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{Y_s}{X_e} = \frac{Y_s}{X_e} e^{j(\varphi_S - \varphi_E)}$$

Si on pose :  $\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ , on voit que :

$$\begin{cases} |H| = H(\omega) = \frac{Y_s}{X_e} \\ \text{Arg } H = \varphi(\omega) = \varphi_S - \varphi_E = \text{déphasage sortie/entrée} \end{cases}$$

Ainsi, la connaissance de  $\underline{H}(j\omega)$  permet de connaître parfaitement la sortie  $y_s$  pour une entrée  $x_E$  donnée (son amplitude et sa phase à l'origine), pour toute valeur de  $\omega$ .

I.4. Représentations de  $\underline{H} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

\*Diagrammes linéaires : on trace  $H(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$



Inconvénient : en électronique, on couvre en général une large plage de fréquences (en TP, avec du matériel de base, on peut couvrir la plage 100 Hz → 100 kHz), et ce mode de représentation est donc peu pratique et peu utilisé.

\*Diagramme de Bode : il s'agit d'utiliser une échelle logarithmique en abscisse (pour les raisons invoquées ci-dessus).

On définit de plus :

$$G_{dB} = 20 \log H, \text{ gain en décibels}$$

(uniquement si  $H = \frac{U_s}{U_e}$  ou  $H = \frac{I_s}{I_e}$  est sans dimension).

Le diagramme de Bode est alors le tracé des 2 courbes :



Rem. : • On trace en général un diagramme de Bode sur du papier « semi-logarithmique » (avec une échelle logarithmique).

•  $\log \omega \rightarrow -\infty$  : un diagramme de Bode ne « s'arrête pas » à  $\log \omega = 0$ .  
 $\omega \rightarrow 0$

• Si  $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$  :  $\begin{cases} G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$

on peut alors sommer les deux diagrammes de Bode de  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  pour obtenir celui de  $\underline{H}$ .

•  $\begin{cases} G_{dB} = 0 \Leftrightarrow H = 1 \\ G_{dB} < 0 \Leftrightarrow H < 1 \\ G_{dB} > 0 \Leftrightarrow H > 1 \end{cases}$

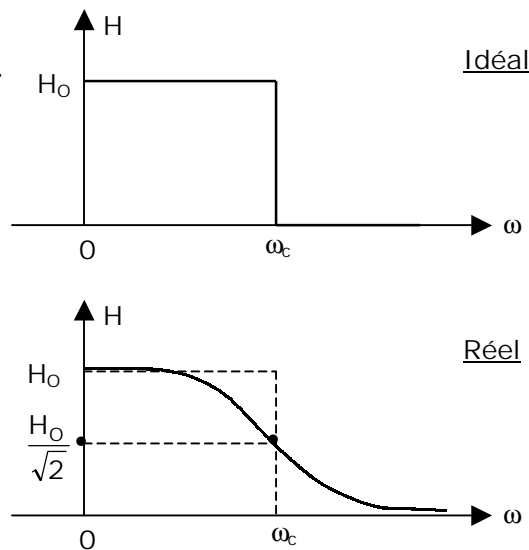
$$\left\{ \begin{array}{l} H = 10 \Leftrightarrow G_{dB} = 20 \\ H = 10^2 \Leftrightarrow G_{dB} = 40 \\ \vdots \\ H = 10^{-1} \Leftrightarrow G_{dB} = -20 \\ H = 10^{-2} \Leftrightarrow G_{dB} = -40 \\ \vdots \end{array} \right.$$

## II. Filtrage.

En électronique, un « filtre » est un système linéaire qui transmet (le plus parfaitement possible) certaines fréquences et atténue (le plus possible) les autres.

Il est caractérisé par sa « bande passante », bande de fréquences (ou de pulsations) transmise par le filtre :  $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$  ou  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ .  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  sont les « pulsations de coupure ».

### II.1. Filtre passe-bas.

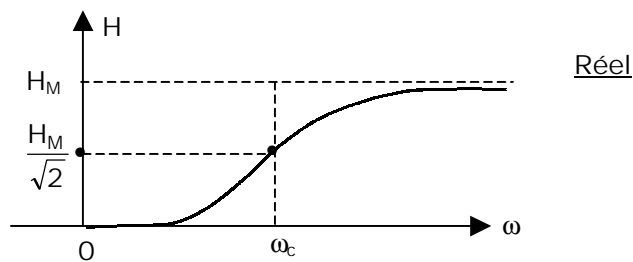
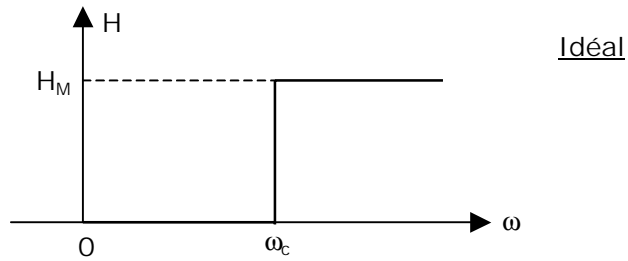


Par convention, on définit la « bande passante à -3 dB », c'est-à-dire les pulsations de coupure à -3 dB telles que :

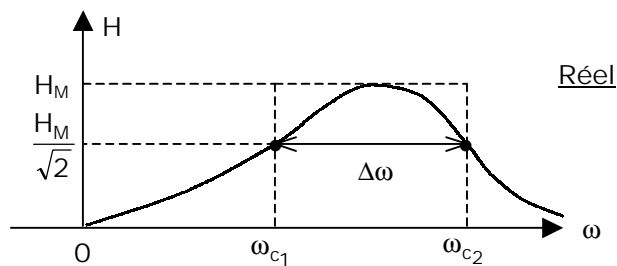
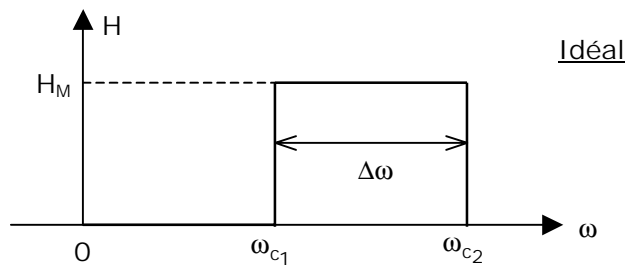
$$H(\omega_c) = \frac{H_{Max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow G(\omega_c) = G_{Max} - 3 \text{ dB}$$

II.2. Filtre passe-haut.



II.3. Filtre passe-bande :



II.4. Filtre « réjecteur de bande ».