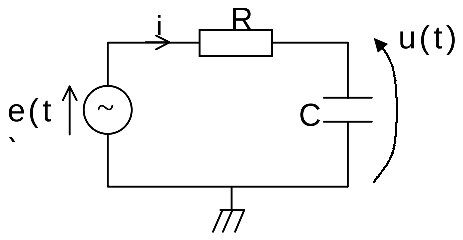
RESEAUX LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL FORCE (RSF)

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

I. Exemple préliminaire.



Alimentons un circuit (R,C) par un générateur sinusoïdal de fem $e(t) = E\sqrt{2}\cos \omega t$.

Alors : $$e(t) = Ri + u = RC\dot{u} + u$$

L'équation différentielle sur u(t) est donc :

$$\tau \dot{u} + u = E\sqrt{2}\cos \omega t \qquad (1)$$

En régime RSF, on ne s'intéresse qu'à une solution particulière de cette équation, et on cherche :

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

Alors : $$\dot{u} = -\omega U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

Et en reportant dans (1) :

$$-\omega\tau U \underbrace{\sin(\omega t + \varphi)}_{\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi} + U \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}_{\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi} = E\cos \omega t$$

Ainsi :

$$\cos \omega t\,[\omega\tau \sin \varphi + \cos \varphi] + \sin \omega t\,[-\omega\tau \cos \varphi - \sin \varphi] = \frac{E}{U}\cos \omega t \quad , \forall t$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} -\omega\tau \cos \varphi - \sin \varphi = 0 \\ -\omega\tau \sin \varphi - \cos \varphi = \dfrac{E}{U} \end{cases}$$

On en déduit : $\boxed{\cos \varphi = - \tau \omega}$

$$\begin{cases} \sin \varphi = \dfrac{-\tau\omega}{\sqrt{1+\tau\omega^2}} \\ \cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{U = \dfrac{E}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}}$

On voit que, pour un circuit très simple, les calculs en notation réelle sont assez longs. Nous allons donc utiliser la notation complexe, qui permettra de résoudre de manière élégante et assez rapide les exercices et problèmes sur les circuits linéaires en RSF.

II. La notation complexe.

II.1. Définitions.

Soit $x(t) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ une grandeur sinusoïdale de pulsation x.

*On associe à x(t) sa grandeur complexe instantanée :

$$\boxed{\underline{x}(t) = X\sqrt{2}\, e^{j(\omega t+\varphi)}}$$

Rem. : en physique, "i" = $e^{i\Pi/2}$ est souvent noté "j", en particulier en électricité pour éviter une confusion avec l'intensité.

On a alors : $\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{x}(t)\right)}$

*On pose aussi : $\boxed{\underline{X} = X_M\, e^{j\varphi} = X\sqrt{2}\, e^{j\varphi}}$

(ou parfois $\underline{X} = X\, e^{j\varphi}$)

$\underline{X}$ est l'amplitude complexe associée à x(t) : pour une pulsation ω donnée, la connaissance de $\underline{X}$ donne X et φ, donc caractérise parfaitement la grandeur x(t).

II.2. Intérêt : il s'agit de remplacer toute relation différentielle linéaire par une relation linéaire non différentielle. En effet :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (j\omega)\,\underline{x} \\ \ddot{\underline{x}} = (j\omega)^2\,\underline{x} = -\,\omega^2\,\underline{x} \\ \underline{x}^{(n)} = (j\omega)^n\,\underline{x} \end{cases}$$

Dériver en notation complexe revient donc à multiplier par $j\omega$.

Rem. : $j = e^{i\Pi/2}$, et on retrouve que dériver une fonction sinusoïdale revient à ajouter $\Pi/2$ à l'argument (rotation de $\frac{\Pi}{2}$) :

$$\frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \cos(\omega t + \Pi/2) = -\sin \omega t$$

De même : $\boxed{\int \underline{x}(t)\,dt = \frac{1}{j\omega}\,\underline{x}}$

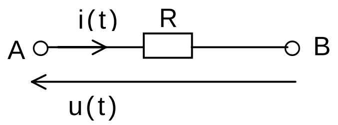
III. Impédance et admittance complexe.

Nous admettrons ici la propriété mathématique suivante :

$$x(t) = y(t),\ \forall t \Leftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{y}(t)$$

Alors :

III.1. Résistance :

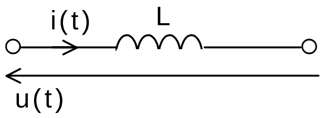


$$u(t) = R\,i(t) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u}(t) = R\,\underline{i}(t)$$

On pose alors : $\boxed{\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}}$ impédance complexe du dipôle

Pour une résistance : $\boxed{\underline{Z} = R \in \mathbb{R}}$

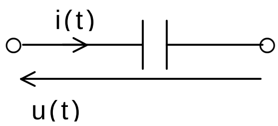
III.2. Bobine :



$$u(t) = L\,\overset{\circ}{i}(t) \iff \underline{u}(t) = L\,\underbrace{\overset{\circ}{\underline{i}}(t)}_{j\omega\underline{i}}$$

Ainsi : $\underline{u} = (jL\omega)\,\underline{i}$: $\boxed{\underline{Z} = jL\omega}$

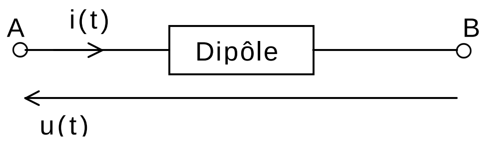
III.3. Condensateur :



$$i(t) = C\,\overset{\circ}{u}(t) \iff \underline{i}(t) = C\,\overset{\circ}{\underline{u}}(t) = C\,(j\omega\underline{u})$$

Ainsi $\underline{u} = \dfrac{1}{jC\omega}\,\underline{i}$: $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}}$

III.4. Généralisation : soit un dipôle AB en RSF :



Posons :
$$\begin{cases} i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t \leftrightarrow \underline{i}(t) = I\sqrt{2}\,e^{j\omega t} \\ u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi) \leftrightarrow \underline{u}(t) = U\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{j\varphi} \end{cases}$$

On définit alors :

$\boxed{\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}}$, impédance complexe du dipôle

$\boxed{\underline{Y} = \dfrac{\underline{i}}{\underline{u}} = \dfrac{1}{\underline{Z}}}$, admittance complexe du dipôle

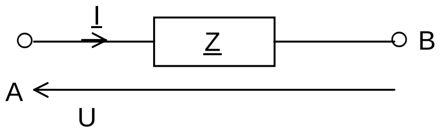
On voit alors que :

$\left|\underline{Z}\right| = Z = \dfrac{U}{I}$ (« impédance » en Ω du dipôle)

$\mathrm{Arg}\left|\underline{Z}\right| = \varphi$ = déphasage u/i

De même :
$$\begin{cases} \left|\underline{Y}\right| = Y = \dfrac{I}{U} = \dfrac{1}{Z} \quad \text{(en S)} \\ \text{Arg}\left|\underline{Y}\right| = -\varphi = \text{déphasage } i/u \end{cases}$$

<u>Notation</u> :

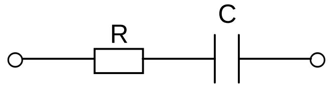


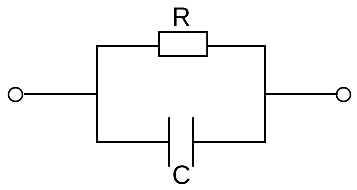
$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}}$$

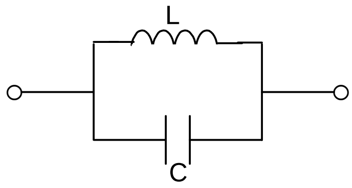
Et on retiendra :
$$\begin{cases} \underline{Z_R} = R & \left| \begin{array}{l} Z_R = R \\ \varphi = 0 \end{array}\right. \\ \underline{Z_L} = j L \omega & \left| \begin{array}{l} Z_L = L w \\ \varphi = +\Pi/2 \end{array}\right. \\ \underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega} & \left| \begin{array}{l} Z_C = \dfrac{1}{C\omega} \\ \varphi = -\Pi/2 \end{array}\right. \end{cases}$$

III.5. Exemples de calcul : les lois des nœuds et des mailles restant valables en notation complexe, on aura :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{Z} = \sum_i \underline{Z_i} \\ \underline{Y} = \sum_i \underline{Y_i} \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{en série} \\ \text{en parallèle} \end{array}$$







$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}} \\ \varphi = -\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{RC\omega}\right) \end{cases}$$

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R}$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\begin{cases} Z = \dfrac{R}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} \\ \varphi = -\text{Arctan}\ RC\omega \end{cases}$$

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\begin{cases} Z = \dfrac{L\omega}{\left|1 - LC\omega^2\right|} \\ \varphi \pm \Pi/2 \end{cases}$$

Rem. : dans tous les calculs en RSF, on retrouve des groupements sans dimension, du type :

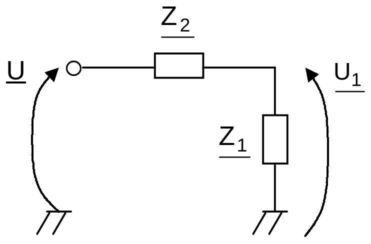
$$RC\omega\ ,\ \frac{L\omega}{R}\ ,\ LC\omega^2 ...$$

(ce qui permet de vérifier l'homogénéité des résultats obtenus).

IV. Théorèmes pour les circuits linéaires en RSF.

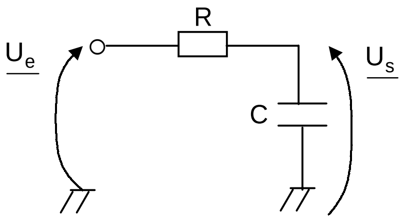
La relation $\underline{u} = \underline{Z}\ \underline{i}$ généralisant, en notation complexe, la loi d'Ohm ; les lois des nœuds et des mailles restant valables en notation complexe : tous les théorèmes vus en I et II (diviseurs de tension et courant, théorème de Millmann, transformation triangle/étoile, théorème de superposition, théorème de Thévenin/Norton) restent valables en RSF, à condition d'utiliser la notation complexe.

IV.1. Diviseur de tension.



$$\underline{U_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\ \underline{U}$$

Ex :



$$\boxed{\underline{U_s} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega}\ \underline{U_e}}$$

Soit
$$\underline{U_s} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\ \underline{U_e}$$

Rem. : on retrouve l'exemple préliminaire, et donc beaucoup plus rapidement que :

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$