RESEAUX LINEAIRES EN REGIME VARIABLE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

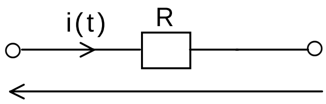
Ces réseaux seront toujours étudiés dans le cadre de l'ARQP.

Toutes les lois vues en I restent valables, comme nous l'avons déjà précisé.

Les principaux composants passifs rencontrés sont les résistances, les bobines et les condensateurs.

I. Rappels sur les dipôles R, L, C :

I.1. Résistance :

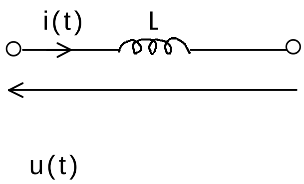


$U(t) = Ri(t)$

$$\begin{cases} P_J = Ri^2(t) & \text{en watts (W)} \\ W_J = \int_O^\tau Ri^2(t)\,dt & \text{en Joules (J)} \end{cases}$$

(énergie dissipée par effet Joule pendant l'intervalle [O,τ]).

I.2. Bobine parfaite :



$$\boxed{u(t) = L\frac{di}{dt} = L\overset{o}{i}(t)}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}L\,i^2}$$ énergie magnétique emmagasinée

Conséquence : l'énergie W_m ne pouvant être discontinue, l'intensité dans une bobine ne peut varier que de manière continue (par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'interrupteurs).

François MORAND

I.3. Condensateur parfait :

$$i = \frac{dq}{dt} =$$

$$q(t) = Cu(t)$$

u(t)

$$\boxed{i(t) = C\frac{du}{dt} = C\dot{u}\,(t)}$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu^2}$$ énergie électrique emmagasinée

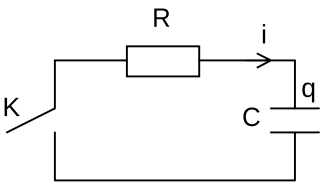
Conséquence : la continuité de W_e implique la continuité de q(t) et u(t) pour un condensateur.

II. *Circuits du 1^er^ ordre.*

Un circuit linéaire est dit du 1er ordre si les variations temporelles de toute grandeur électrique du circuit sont régies par une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

II.1. Circuit (R, C).

*Décharge du condensateur



$$\begin{cases} t < 0 : \text{K ouvert} \\ \qquad q = q_0 \ ;\ i = 0 \\ t > 0 : \text{K fermé} \end{cases}$$

On cherche à déterminer q(t), i(t) et à faire un bilan énergétique.

Pour K fermé :

$$\begin{cases} Ri(t) + \dfrac{q}{C} = 0 \\ i = \dot{q} \end{cases}$$

Ainsi : $$\boxed{\dot{q} + \frac{q}{RC} = 0}$$

On pose $\tau = RC$, « constante de temps », ou « temps de relaxation » du circuit (R, C). L'équation différentielle du 1er ordre régissant q(t) est alors :

$$\boxed{\dot{q} + \frac{q}{\tau} = 0}$$

Sa solution est :

$$q(t) = A\ e^{-t/\tau}$$

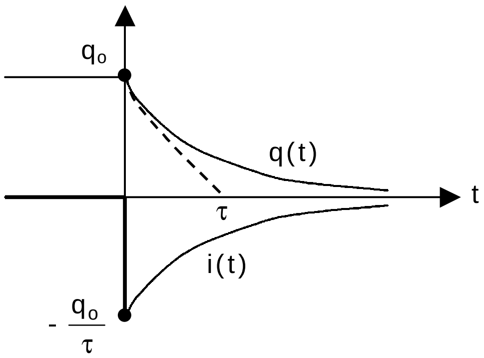
Comme q(t) est continue à t = 0 :

$$q(0^-) = q_o = q(0^+) = A$$

Donc :

$$\boxed{q(t) = \quad = -\frac{q_o}{\tau}\ e^{-t/\tau}}$$

$$i(t) = \dot{q} = -\frac{\dot{q}}{\tau}\ e^{-t/\tau}$$



On remarque la discontinuité de i(t)) la fermeture de l'interrupteur K.

Bilan énergétique : multiplions la loi des mailles par $i = \dot{q}$:

$$Ri^2 + \frac{q\dot{q}}{C} = 0\ , \qquad \text{ce qui s'écrit :}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = -Ri^2$$

Soit :

$$\frac{dW_e}{dt} = -P_J$$

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{W_e(\infty)}_{0} - W_e(0) = -\int_0^\infty Ri^2(t)dt$$

Toute l'énergie emmagasinée initialement dans les condensateurs est dissipée par effet Joule dans la résistance.

On peut alors vérifier :

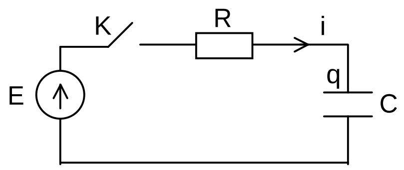
$$\int_0^\infty Ri^2(t)dt = W_J = \int_0^\infty R\left(-\frac{q_o}{\tau}e^{-t/\tau}\right)^2 dt$$

$$= \frac{Rq_o^{\ 2}}{\tau^2}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt$$

$$= \frac{Rq_o^{\ 2}}{\tau^2}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Rq_o^{\ 2}}{\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{q_o^{\ 2}}{C} = W_e(0)$$

*<u>Charge du condensateur</u>



$$\begin{cases} t < 0 : \text{K ouvert} \\ \qquad q = 0\ ;\ i = 0 \\ t > 0 : \text{K fermé} \end{cases}$$

On a cette fois : $E = Ri + \dfrac{q}{C}$

Soit : $$\boxed{\dot{q} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{R}}$$

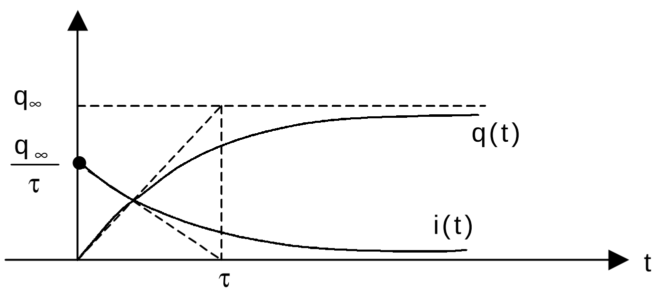
La solution est : $q(t) = A\ e^{-t/\tau} + CE$

Toujours par continuité de $q(t)$ à $t = 0$:

$$q(0^-) = 0 = q(0^+) = A + CE$$

Finalement : $\boxed{q(t) = q_\infty(1 - e^{-t/\tau})}$ avec $\underline{q_\infty = CE}$

Puis : $i(t) = \dot{q} = \dfrac{q_\infty}{\tau}\ e^{-t/\tau}$



On remarque toujours la discontinuité de i(t) à t = 0.

Bilan énergétique : $$\underbrace{Ei}_{P_{géré}} = \underbrace{Ri^2}_{P_J} + \underbrace{\frac{\dot{q}\,q}{C}}_{\frac{dW_e}{dt}}$$: la puissance $P_{géré}$ fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule dans R, et en partie stockée sous forme électrique dans le condensateur.

De plus : $$W_{géré} = \int_0^\infty Ei(t)dt = \underbrace{\int_0^\infty Ri^2(t)dt}_{W_J} + \Delta W_e$$

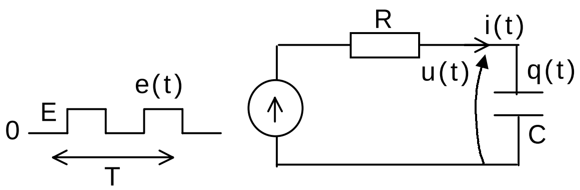
Vérifions ce bilan par le calcul :

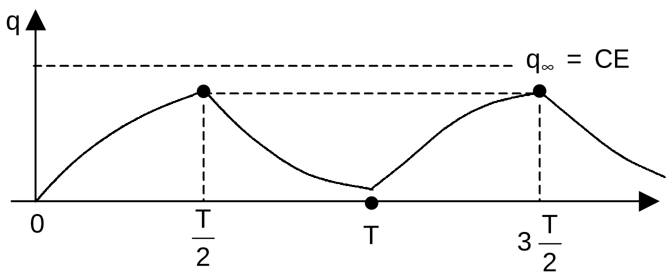
$$\begin{cases} W_{géré} = \int_0^\infty E\dfrac{q_\infty}{\tau}e^{-t/\tau}dt = \dfrac{Eq_\infty}{\tau}\left[-\tau\, e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = CE^2 \\ \Delta W_e = W_e(\infty) = \dfrac{1}{2}\dfrac{q_\infty^2}{C} = \dfrac{1}{2}CE^2 \\ W_J = \int_0^\infty R\left(\dfrac{q_\infty}{\tau}e^{-t/\tau}\right)^2 dt = \dfrac{Rq_\infty^2}{\tau^2}\left[-\dfrac{C}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \dfrac{1}{2}\dfrac{Rq_\infty^2}{\tau} = \dfrac{1}{2}CE^2 \end{cases}$$

On remarque que le « rendement énergétique » de la charge n'est que de 50 % :

$$\boxed{\eta = \frac{\text{Energie "utile"}}{\text{Energie "coûteuse"}} = \frac{W_e(\infty)}{W_{géré}} = \frac{1}{2}}$$

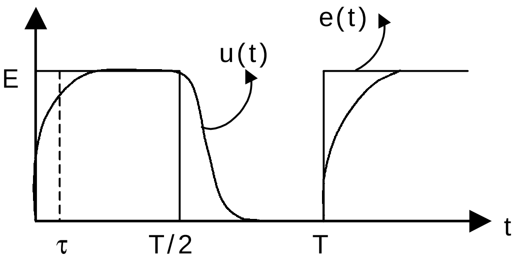
*<u>Succession de charges et de décharges</u>



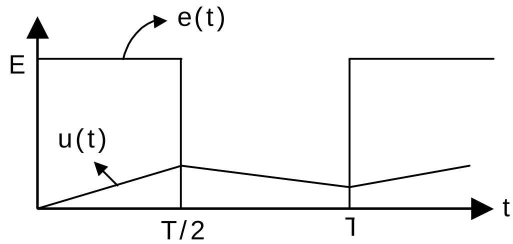


François MORAND

Cas particuliers :



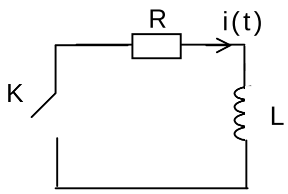
$\tau << T$



$\tau >> T$

II.2. Circuit (R, L).

*Rupture de courant :



$$\begin{cases} t < 0 : \text{K ouvert} \\ \quad\quad\quad i = i_o \\ t > 0 : \text{K fermé} \end{cases}$$

Pour t > 0 :

$$Ri + L\,\dot{i} = 0 \quad : \quad \boxed{\dot{i} + \frac{i}{\tau} = 0}$$

la constante de temps du circuit (R, L) étant :

$$\boxed{\tau = L/R}$$

Par continuité de i(t) à t = 0,on obtient :

$$\boxed{i(t) = i_o\, e^{-t/\tau}}$$

En multipliant par i la loi de maille, on fait apparaître des termes d'énergie :

$$Ri^2 + \underbrace{L\,i\,\dot{i}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L\, i^2\right)} = 0$$

Soit : $\frac{dW_m}{dt} = -P_J$: l'énergie stockée initialement sous forme magnétique est intégralement dissipée par effet Joule.