RESEAUX LINEAIRES EN REGIME VARIABLE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

* *

I. Rappels sur les dipôles R, L, C : 1
II. Circuits du 1er ordre. 2
III. Circuits du 2e ordre : ils seront régis par une équation différentielle linéaire du 2e ordre à coefficients constants..... 8
IV. Généralisation : circuits linéaires d'ordre n. 17

* *

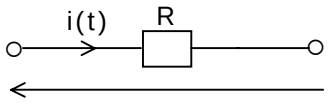
Ces réseaux seront toujours étudiés dans le cadre de l'ARQP.

Toutes les lois vues en I restent valables, comme nous l'avons déjà précisé.

Les principaux composants passifs rencontrés sont les résistances, les bobines et les condensateurs.

I. Rappels sur les dipôles R, L, C :

I.1. Résistance :

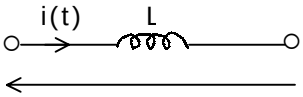


$$U(t) = Ri(t)$$

$$\begin{cases} P_J = Ri^2(t) & \text{en watts (W)} \\ W_J = \int_O^\tau Ri^2(t)\,dt & \text{en Joules (J)} \end{cases}$$

(énergie dissipée par effet Joule pendant l'intervalle $[O,\tau]$).

I.2. Bobine parfaite :



$u(t)$

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = L\overset{o}{i}(t)$$

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2$$ énergie magnétique emmagasinée

Conséquence : l'énergie W_m ne pouvant être discontinue, l'intensité dans une bobine ne peut varier que de manière continue (par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'interrupteurs).

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

I.3. Condensateur parfait :

$$i = \frac{dq}{dt} =$$

$$q(t) = Cu(t)$$

u(t)

$$\boxed{i(t) = C\frac{du}{dt} = C\overset{c}{u}(t)}$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu^2}$$ énergie électrique emmagasinée

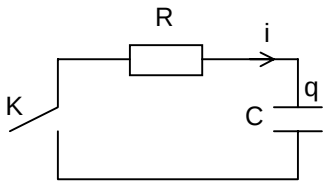
Conséquence : la continuité de W_e implique la continuité de q(t) et u(t) pour un condensateur.

II. Circuits du 1er ordre.

Un circuit linéaire est dit du 1er ordre si les variations temporelles de toute grandeur électrique du circuit sont régies par une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

II.1. Circuit (R, C).

*Décharge du condensateur



$$\begin{cases} t < 0 : K \text{ ouvert} \\ \quad q = q_0 \; ; \; i = 0 \\ t > 0 : K \text{ fermé} \end{cases}$$

On cherche à déterminer q(t), i(t) et à faire un bilan énergétique.

Pour K fermé :

$$\begin{cases} Ri(t) + \frac{q}{C} = 0 \\ i = \overset{o}{q} \end{cases}$$

Ainsi : $$\boxed{\overset{o}{q} + \frac{q}{RC} = 0}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

On pose $\tau = RC$, « constante de temps », ou « temps de relaxation » du circuit (R, C). L'équation différentielle du 1er ordre régissant q(t) est alors :

$$\boxed{\overset{o}{q} + \frac{q}{\tau} = 0}$$

Sa solution est :

$$q(t) = A\, e^{-t/\tau}$$

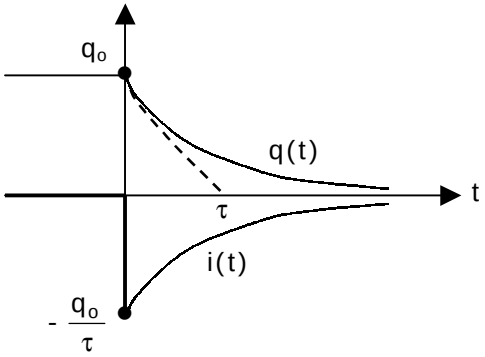
Comme q(t) est continue à t = 0 :

$$q(0^-) = q_o = q(0^+) = A$$

Donc :

$$\boxed{q(t) = \quad = -\frac{q_o}{\tau} e^{-t/\tau}}$$

$$i(t) = \overset{o}{q} = -\frac{\overset{o}{q}}{\tau} e^{-t/\tau}$$



On remarque la discontinuité de i(t)) la fermeture de l'interrupteur K.

Bilan énergétique : multiplions la loi des mailles par $i = \overset{o}{q}$:

$$Ri^2 + \frac{q\overset{o}{q}}{C} = 0 \text{ , ce qui s'écrit :}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = -Ri^2$$

Soit :

$$\frac{dW_e}{dt} = -P_J$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{W_e(\infty)}_{0} - W_e(0) = -\int_0^\infty Ri^2(t)dt$$

Toute l'énergie emmagasinée initialement dans les condensateurs est dissipée par effet Joule dans la résistance.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

On peut alors vérifier :

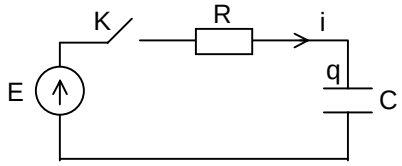
$$\int_0^\infty Ri^2(t)dt = W_J = \int_0^\infty R\left(-\frac{q_o}{\tau}e^{-t/\tau}\right)^2 dt$$

$$= \frac{Rq_o^2}{\tau^2}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt$$

$$= \frac{Rq_o^2}{\tau^2}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Rq_o^2}{\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{q_o^2}{C} = W_e(0)$$

*Charge du condensateur



$\begin{cases} t < 0 : K \text{ ouvert} \\ \quad q = 0 \; ; \; i = 0 \\ t > 0 : K \text{ fermé} \end{cases}$

On a cette fois : $E = Ri + \frac{q}{C}$

Soit : $\boxed{\overset{o}{q} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{R}}$

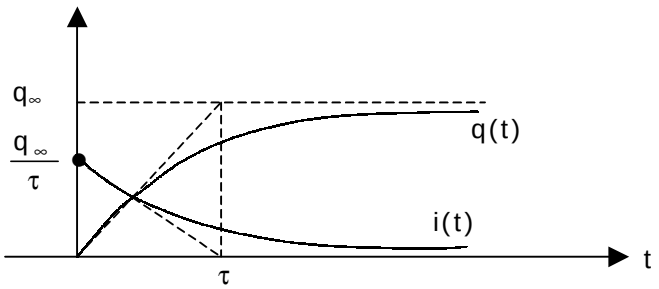
La solution est : $q(t) = A\, e^{-t/\tau} + CE$

Toujours par continuité de q(t) à t = 0 :

$$q(0^-) = 0 = q(0^+) = A + CE$$

Finalement : $\boxed{q(t) = q_\infty\,(1 - e^{-t/\tau})}$ avec $q_\infty = CE$

Puis : $i(t) = \overset{o}{q} = \frac{q_\infty}{\tau}\, e^{-t/\tau}$



 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

On remarque toujours la discontinuité de i(t) à t = 0.

Bilan énergétique : $\underbrace{Ei}_{P_{géré}} = \underbrace{Ri^2}_{P_J} + \underbrace{\frac{q\overset{o}{q}}{C}}_{\frac{dW_e}{dt}}$: la puissance $P_{géré}$ fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule dans R, et en partie stockée sous forme électrique dans le condensateur.

De plus : $W_{géré} = \int_0^\infty Ei(t)dt = \underbrace{\int_0^\infty Ri^2(t)dt}_{W_J} + \Delta W_e$

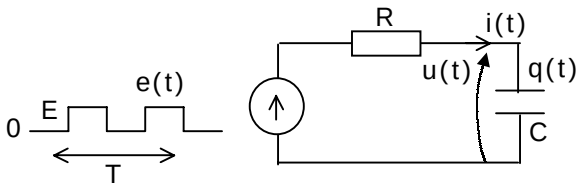
Vérifions ce bilan par le calcul :

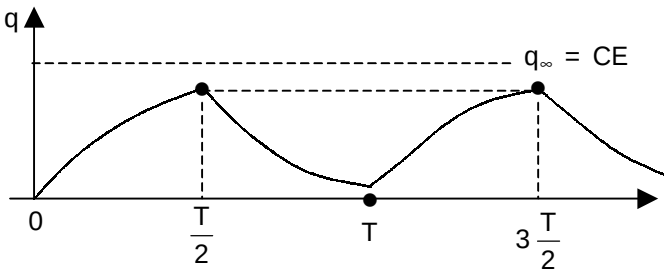
$$\begin{cases} W_{géré} = \int_0^\infty E\frac{q_\infty}{\tau}e^{-t/\tau}dt = \frac{Eq_\infty}{\tau}\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = CE^2 \\ \Delta W_e = W_e(\infty) = \frac{1}{2}\frac{q_\infty^{\,2}}{C} = \frac{1}{2}CE^2 \\ W_J = \int_0^\infty R\left(\frac{q_\infty}{\tau}e^{-t/\tau}\right)^2 dt = \frac{Rq_\infty^{\,2}}{\tau^2}\left[-\frac{C}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\frac{Rq_\infty^{\,2}}{\tau} = \frac{1}{2}CE^2 \end{cases}$$

On remarque que le « rendement énergétique » de la charge n'est que de 50 % :

$$\eta = \frac{\text{Energie "utile"}}{\text{Energie "coûteuse"}} = \frac{W_e(\infty)}{W_{géré}} = \frac{1}{2}$$

*<u>Succession de charges et de décharges</u>

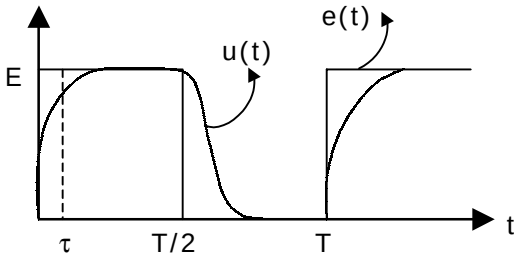




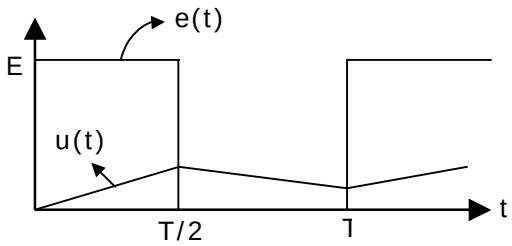
François MORAND
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Cas particuliers :



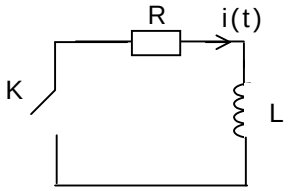
$\tau << T$



$\tau >> T$

II.2. Circuit (R, L).

*Rupture de courant :



$\begin{cases} t < 0 : K \text{ ouvert} \quad i = i_o \\ t > 0 : K \text{ fermé} \end{cases}$

Pour t > 0 :

$$Ri + L\dot{i} = 0 \quad : \quad \boxed{\dot{i} + \frac{i}{\tau} = 0}$$

la constante de temps du circuit (R, L) étant :

$$\boxed{\tau = L/R}$$

Par continuité de i(t) à t = 0,on obtient :

$$\boxed{i(t) = i_o\, e^{-t/\tau}}$$

En multipliant par i la loi de maille, on fait apparaître des termes d'énergie :

$$Ri^2 + \underbrace{L\, i\, \dot{i}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\, i^2\right)} = 0$$

Soit : $\frac{dW_m}{dt} = -P_J$: l'énergie stockée initialement sous forme magnétique est intégralement dissipée par effet Joule.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.