

RESEAUX LINEAIRES EN REGIME VARIABLE

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

I. Rappels sur les dipôles R, L, C : 1
 II. Circuits du 1^{er} ordre. 2
 III. Circuits du 2^e ordre : ils seront régis par une équation différentielle linéaire du 2^e ordre à coefficients constants..... 8
 IV. Généralisation : circuits linéaires d'ordre n..... 17

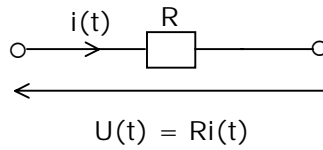
Ces réseaux seront toujours étudiés dans le cadre de l'ARQP.

Toutes les lois vues en I restent valables, comme nous l'avons déjà précisé.

Les principaux composants passifs rencontrés sont les résistances, les bobines et les condensateurs.

I. Rappels sur les dipôles R, L, C :

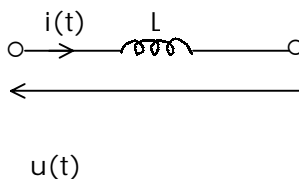
I.1. Résistance :



$$\begin{cases} P_J = Ri^2(t) & \text{en watts (W)} \\ W_J = \int_0^{\tau} Ri^2(t) dt & \text{en Joules (J)} \end{cases}$$

(énergie dissipée par effet Joule pendant l'intervalle [0,τ]).

I.2. Bobine parfaite :



$$u(t) = L \frac{di}{dt} = L \dot{i}(t)$$

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

énergie magnétique emmagasinée

Conséquence : l'énergie W_m ne pouvant être discontinue, l'intensité dans une bobine ne peut varier que de manière continue (par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'interrupteurs).

I.3. Condensateur parfait :

$$i = \frac{dq}{dt} =$$

$$q(t) = Cu(t)$$

 $u(t)$

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = C u'(t)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C u^2$$

énergie électrique emmagasinée

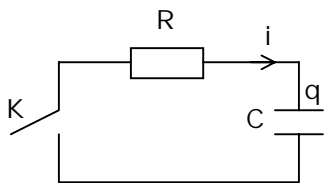
Conséquence : la continuité de W_e implique la continuité de $q(t)$ et $u(t)$ pour un condensateur.

II. Circuits du 1^{er} ordre.

Un circuit linéaire est dit du 1^{er} ordre si les variations temporelles de toute grandeur électrique du circuit sont régies par une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants.

II.1. Circuit (R, C).

*Décharge du condensateur



$$\left\{ \begin{array}{l} t < 0 : K \text{ ouvert} \\ \quad \quad q = q_0 ; i = 0 \\ t > 0 : K \text{ fermé} \end{array} \right.$$

On cherche à déterminer $q(t)$, $i(t)$ et à faire un bilan énergétique.

Pour K fermé :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ri(t) + \frac{q}{C} = 0 \\ i = \dot{q} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\frac{C}{q} + \frac{q}{RC} = 0$$

On pose $\tau = RC$, « constante de temps », ou « temps de relaxation » du circuit (R, C). L'équation différentielle du 1^{er} ordre régissant $q(t)$ est alors :

$$\overset{\circ}{q} + \frac{q}{\tau} = 0$$

Sa solution est :

$$q(t) = A e^{-t/\tau}$$

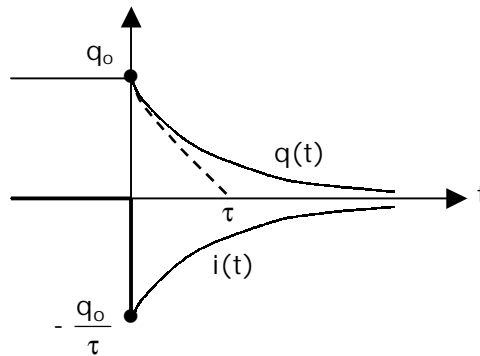
Comme $q(t)$ est continue à $t = 0$:

$$q(0^-) = q_0 = q(0^+) = A$$

Donc :

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = \overset{\circ}{q} = -\frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$



On remarque la discontinuité de $i(t)$ à la fermeture de l'interrupteur K.

Bilan énergétique : multiplions la loi des mailles par $i = \overset{\circ}{q}$:

$$Ri^2 + \frac{q\overset{\circ}{q}}{C} = 0, \quad \text{ce qui s'écrit :}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = - Ri^2$$

Soit :

$$\frac{dW_e}{dt} = - P_J$$

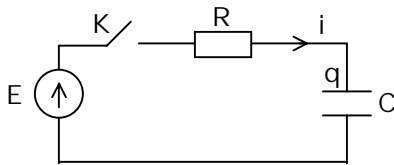
$$\Rightarrow \underbrace{W_e(\infty) - W_e(0)}_0 = - \int_0^{\infty} Ri^2(t) dt$$

Toute l'énergie emmagasinée initialement dans les condensateurs est dissipée par effet Joule dans la résistance.

On peut alors vérifier :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt &= W_J = \int_0^{\infty} R \left(-\frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau} \right)^2 dt \\
 &= \frac{Rq_0^2}{\tau^2} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt \\
 &= \frac{Rq_0^2}{\tau^2} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Rq_0^2}{\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = W_e(0)
 \end{aligned}$$

*Charge du condensateur



$$\begin{cases} t < 0 : K \text{ ouvert} \\ \quad \quad q = 0 ; i = 0 \\ t > 0 : K \text{ fermé} \end{cases}$$

On a cette fois : $E = Ri + \frac{q}{C}$

Soit :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{R}$$

La solution est : $q(t) = A e^{-t/\tau} + CE$

Toujours par continuité de $q(t)$ à $t = 0$:

$$q(0^-) = 0 = q(0^+) = A + CE$$

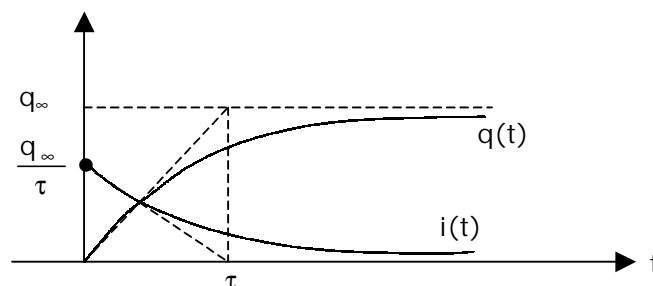
Finalement :

$$q(t) = q_{\infty} (1 - e^{-t/\tau})$$

avec $q_{\infty} = CE$

Puis :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{q_{\infty}}{\tau} e^{-t/\tau}$$



On remarque toujours la discontinuité de $i(t)$ à $t = 0$.

Bilan énergétique :

$$\underbrace{Ei}_{P_{\text{géré}}} = \underbrace{Ri^2}_{P_J} + \underbrace{\frac{dq}{C}}_{\frac{dW_e}{dt}} \quad : \quad \text{la puissance } P_{\text{géré}} \text{ fournie par le}$$

générateur est en partie dissipée par effet Joule dans R , et en partie stockée sous forme électrique dans le condensateur.

De plus :

$$W_{\text{géré}} = \int_0^\infty Ei(t)dt = \underbrace{\int_0^\infty Ri^2(t)dt}_{W_J} + \Delta W_e$$

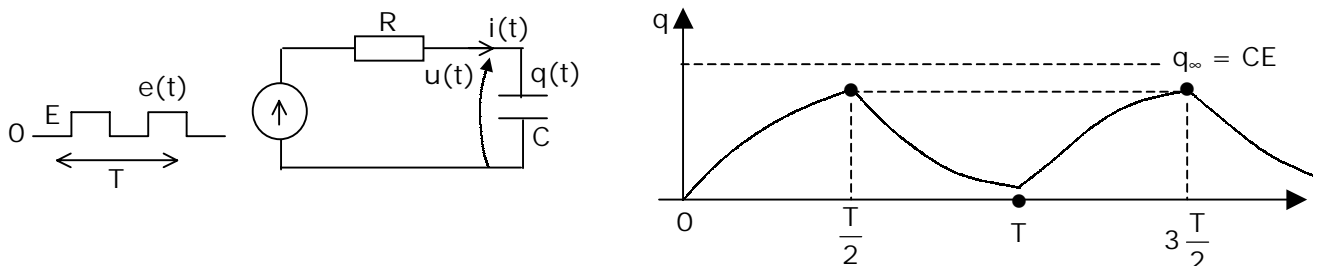
Vérifions ce bilan par le calcul :

$$\begin{cases} W_{\text{géré}} = \int_0^\infty E \frac{q_\infty}{\tau} e^{-t/\tau} dt = \frac{Eq_\infty}{\tau} \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^\infty = CE^2 \\ \Delta W_e = W_e(\infty) = \frac{1}{2} \frac{q_\infty^2}{C} = \frac{1}{2} CE^2 \\ W_J = \int_0^\infty R \left(\frac{q_\infty}{\tau} e^{-t/\tau} \right)^2 dt = \frac{Rq_\infty^2}{\tau^2} \left[-\frac{C}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} \frac{Rq_\infty^2}{\tau} = \frac{1}{2} CE^2 \end{cases}$$

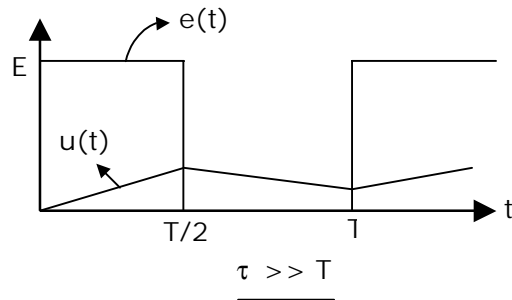
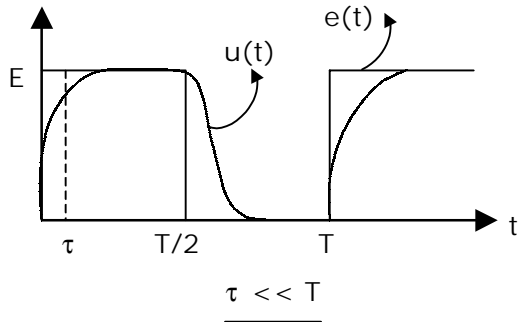
On remarque que le « rendement énergétique » de la charge n'est que de 50 % :

$$\eta = \frac{\text{Energie "utile"}}{\text{Energie "coûteuse"}} = \frac{W_e(\infty)}{W_{\text{géré}}} = \frac{1}{2}$$

*Succession de charges et de décharges

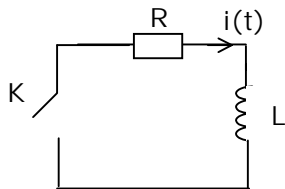


Cas particuliers :



II.2. Circuit (R, L).

*Rupture de courant :



$\left\{ \begin{array}{l} t < 0 : K \text{ ouvert} \\ \quad \quad i = i_0 \\ t > 0 : K \text{ fermé} \end{array} \right.$

Pour $t > 0$:

$$Ri + L \overset{\circ}{i} = 0 \quad : \quad \boxed{\overset{\circ}{i} + \frac{i}{\tau} = 0}$$

la constante de temps du circuit (R, L) étant :

$$\boxed{\tau = L/R}$$

Par continuité de $i(t)$ à $t = 0$, on obtient :

$$\boxed{i(t) = i_0 e^{-t/\tau}}$$

En multipliant par i la loi de maille, on fait apparaître des termes d'énergie :

$$Ri^2 + L \underbrace{i \overset{\circ}{i}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)} = 0$$

Soit : $\frac{dW_m}{dt} = - P_J$: l'énergie stockée initialement sous forme magnétique est intégralement dissipée par effet Joule.