-PROBLEME DE MAGNETOSTATIQUE 1-

• ENONCE :

« **Prisme magnétique à champ non uniforme** »

• Nous nous proposons d'examiner ici la possibilité de focaliser un faisceau d'électrons et d'en effectuer l'analyse en énergie, à l'aide d'un secteur magnétique à champ non uniforme : nous limiterons notre étude aux propriétés optiques du premier ordre d'un tel système.

• Données numériques et formulaire :

♦ charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}C$; masse de l'électron : $m = 9{,}31.10^{-31}kg$

♦ en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_z$$

I. Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Un électron de charge $-e$ et de masse m, pénètre, à l'instant $t = 0$, dans une région de l'espace où règne un champ magnétique permanent et uniforme $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$, avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$; on suppose que cette vitesse est suffisamment faible pour que l'étude du mouvement de la particule puisse se faire dans le cadre de la mécanique newtonienne.

1.1) Montrer que le champ magnétique ne modifie pas l'énergie cinétique E_C de la particule.

1.2) Montrer que la trajectoire de la particule dans la zone où règne le champ magnétique est une portion de cercle de rayon R ; exprimer R en fonction de e, m, B_0 et v_0.

II. Structure d'un champ magnétique non uniforme

• L'entrefer d'un électroaimant à champ permanent définit un volume de l'espace délimité par :

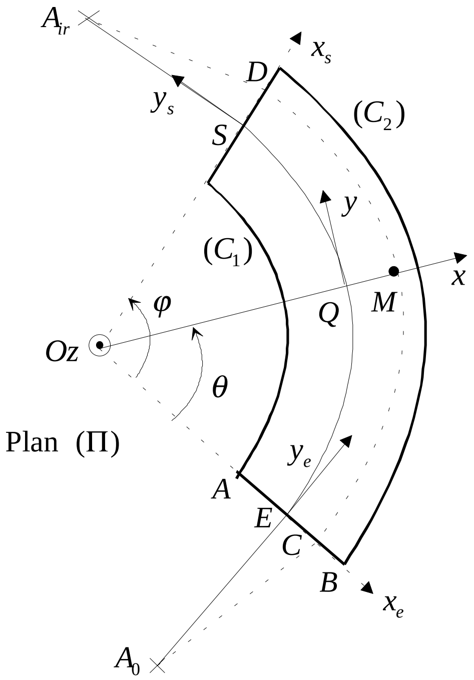
♦ deux plans formant un dièdre d'angle φ et d'arête Oz orthogonale au plan (Π) de la feuille (figure 1.a).

♦ deux cylindres coaxiaux (C_1) et (C_2) d'axe Oz et de rayons respectifs $R_1 = OA$ et $R_2 = OB$ (figure 1.a).

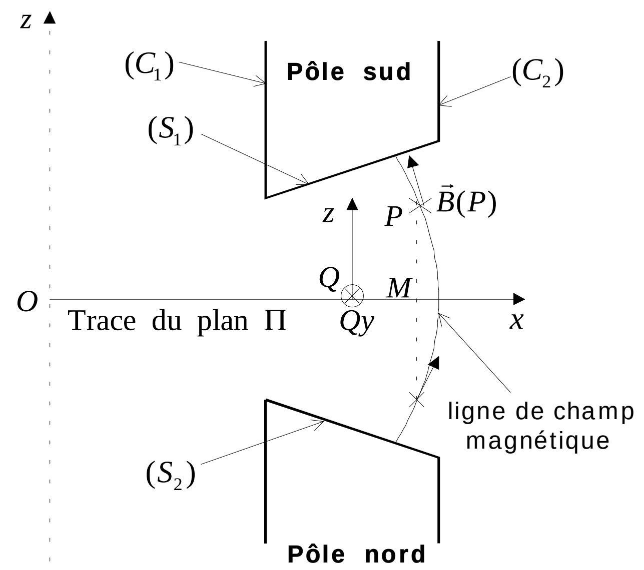
♦ deux surfaces de révolution (S_1) et (S_2) représentant les faces en regard des pièces polaires (figure 1.b) ; ces deux surfaces sont symétriques par rapport au plan (Π), qui est ainsi plan de symétrie mécanique du système et également **plan d'antisymétrie** pour les **lignes de champ magnétique**.

• Un point P de l'entrefer est repéré dans le système de coordonnées cylindriques par :

$r = OM$, où M est la projection orthogonale de P sur le plan (Π) ; $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OM}})$ et $z = \overline{MP}$.



- Figure 1.a -



- Figure 1.b -

• On considère de plus, le système de coordonnées curvilignes (Q, x, y, z) défini sur la figure 1.a, dans lequel la position du point P est repérée par les coordonnées x, y, z :

- ♦ Q est l'intersection du plan contenant Oz et le point P avec le cercle de rayon $R = OE$
- ♦ $x = \overline{QM} = r - R$
- ♦ $y = R\theta$ est l'abscisse curviligne de Q mesurée sur le cercle de rayon R à partir de E
- ♦ la coordonnée z a la même valeur que dans le système de coordonnées cylindriques : elle mesure la distance orthogonale $\overline{MP}$ du point P au plan (Π).

• On admettra qu'en dehors de l'entrefer, le champ magnétique est **nul** et qu'il subit une discontinuité sur les faces d'entrée et de sortie du prisme magnétique ; on admettra, en outre, que partout dans l'entrefer, la composante B_θ du champ est nulle, et que les autres composantes (B_r et B_z) ne dépendent pas de θ.

• La forme des pièces polaires est telle qu'en tout point M du plan (Π), on a :

$$\boxed{B_z(M) = B_0\left(\frac{r}{R}\right)^{-n}}$$, où n est une constante dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

2.1) Montrer que si l'on se limite à un développement au premier ordre par rapport à z/R, la composante $B_z(P)$ du champ en un point P quelconque de l'entrefer ne dépend pas de la variable z et que l'on peut écrire par conséquent :

$$\boxed{B_z(P) = B_0\left(\frac{r}{R}\right)^{-n}}$$

2.2) Exprimer la composante radiale $B_r(M)$ du champ en un point quelconque M du plan (Π).

2.3) Montrer que si l'on se limite à un développement limité au premier ordre par rapport à x/R et z/R, la composante radiale $B_r(P)$ du champ en un point quelconque P de l'entrefer s'écrit : $\boxed{B_r(P) = -nB_0 \times \frac{z}{R}}$

III. Equations différentielles du mouvement de l'électron dans le prisme

On considère un électron de vitesse $\vec{v}$ se déplaçant sur une *trajectoire quelconque* dans l'entrefer de l'électroaimant.

3.1) Exprimer les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ de la particule, dans la base du système de coordonnées cylindriques r, θ, z.

3.2) En déduire que les équations différentielles des mouvement radial (dans le plan Π) et axial (suivant z) de l'électron s'écrivent respectivement :

$$\boxed{\frac{d^2r}{dt^2} = r\frac{d\theta}{dt}\left[\frac{d\theta}{dt} - \omega\left(\frac{r}{R}\right)^{-n}\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^2z}{dt^2} = -n\omega r \times \frac{d\theta}{dt} \times \frac{z}{R}}$$

Exprimer ω en fonction des données.

IV. Propriétés focalisatrices du prisme magnétique

4.1) Un électron se déplaçant sur la trajectoire A_0E, aborde normalement la face d'entrée du secteur magnétique en E (figure 1.a) : quelle doit être la norme v_0 de sa vitesse pour que sa trajectoire dans le prisme soit le cercle de centre O et de rayon $R = OE$?

Dans la suite, on désignera la trajectoire particulière A_0EQSA_{ir} sous le nom « **d'axe optique** » (figure 1.a).

4.2) On considère maintenant un électron se déplaçant dans le prisme sur une *trajectoire quelconque voisine* de l'axe optique, avec une vitesse de norme v_0.

a) Exprimer $r\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de v_0, $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$.

b) Montrer que si l'on se limite à un développement limité au premier ordre par rapport aux infiniment petits que sont les quantités $\frac{1}{v_0} \times \frac{dr}{dt}$ et $\frac{1}{v_0} \times \frac{dz}{dt}$, la quantité $r\frac{d\theta}{dt}$ est une constante que l'on explicitera.

c) En déduire l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ développée au premier ordre par rapport à l'infiniment petit $\frac{x}{R}$.

4.3) Montrer que les équations différentielles du mouvement vérifiées par les coordonnées x et z s'écrivent respectivement, après linéarisation :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}=-A_r^2\times x} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^2z}{dt^2}=-A_a^2\times z}$$

où A_r et A_a sont deux constantes que l'on exprimera en fonction de ω et de n.

4.4) On obtient les équations différentielles des trajectoires, à partir des équations différentielles du mouvement établies dans la question précédente, en remplaçant la variable t par la variable de position y. En remarquant que ces deux variables sont liées par la relation $dy/dt=v_0$, montrer que les équations différentielles des trajectoires s'écrivent :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dy^2}=-k_r^2\times x} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^2z}{dy^2}=-k_a^2\times z}$$

Exprimer k_r et k_a en fonction de n et R.

4.5) Dans *l'espace objet* (espace situé en avant de la face d'entrée du prisme) et **dans** le prisme, on repère la position d'un point Q sur l'axe optique par son abscisse curviligne $y=\overline{EQ}$, en prenant l'origine des abscisses au point E de la face d'entrée (figure 1.a).

Une trajectoire du plan Π passant par le point A_0 de coordonnées $x=0$ et $y=\overline{EA_0}=y_0$, aborde la face d'entrée du prisme au point C de coordonnées $x=x_e$ et $y=0$ avec une pente $x_e^{'}=\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=0}$ (figure 1.a).

Montrer que la coordonnée x_s du point d'intersection D de la trajectoire avec la face de sortie du prisme et la pente $x_s^{'}$ de la trajectoire en ce point se déduisent de la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{x_s}{R} \\ x_s^{'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x_e}{R} \\ x_e^{'} \end{pmatrix}$$

Exprimer les coefficients T_{11}, T_{12}, T_{21} et T_{22} en fonction de φ et $\varepsilon_r=Rk_r$.

4.6) Dans l'*espace image* (espace situé après la face de sortie du prisme), on repère la position d'un point Q sur l'axe optique par son abscisse curviligne $y=\overline{SQ}$, en prenant l'origine des abscisses au point S de la face de sortie (figure 1.a).

A la sortie du prisme magnétique, la trajectoire issus de A_0 et contenue dans le plan (Π), coupe l'axe optique au point A_{ir} d'abscisse curviligne $y_{ir}=\overline{SA_{ir}}$.

a) Ecrire la relation **algébrique** entre $x_e, x_e^{'}$ et y_0, ainsi que la relation **algébrique** entre $x_s, x_s^{'}$ et y_{ir}.

b) Exprimer $\frac{y_{ir}}{R}$ en fonction de $\frac{y_0}{R}$ et des coefficients T_{ij}.

c) En déduire que toutes les trajectoires du plan (Π) passant par le point A_0, recoupent l'axe optique au point A_{ir}.

d) Montrer que toutes les trajectoires du plan A_0Ez_e de l'espace objet, issues du point A_0 de l'axe optique, passent par un même point A_{ia} de l'axe optique dans l'espace image.

Notant y_{ia} l'abscisse curviligne de A_{ia}, exprimer $\frac{y_{ia}}{R}$ en fonction de $\frac{y_0}{R}$, $\varepsilon_a = Rk_a$ et φ.

e) Quelle relation doit-il exister entre ε_r et ε_a pour que toutes les trajectoires issues d'un point objet A_0 de l'axe optique se recoupent en un même point image A_i de cet axe ? Quelle doit être la valeur de n pour que cette relation soit vérifiée ?

V. Propriété dispersive du prisme magnétique

On considère maintenant les électrons dont la norme v de la vitesse est voisine de v_0 et s'écrit :

$$v = v_0\left(1+\frac{\delta v}{v_0}\right) \qquad \text{avec :} \qquad \frac{\delta v}{v_0} \ll 1$$

5.1) Exprimer $r\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de $v, \frac{dr}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$; en négligeant les termes du second ordre en $\frac{1}{v}\times\frac{dr}{dt}$ et $\frac{1}{v}\times\frac{dz}{dt}$, déduire l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ limitée aux termes du premier ordre en $\frac{x}{R}$ et $\frac{\delta v}{v_0}$.

5.2) Montrer que l'équation différentielle pour une trajectoire du plan (Π) s'écrit :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dy^2} = -k_r^2 \times x + \alpha}$$

Exprimer α en fonction de $\frac{\delta v}{v_0}$ et R.

5.3) Une trajectoire du plan (Π) passant par le point A_0 de coordonnées $x = 0$ et $y = \overline{EA_0} = y_0$, aborde la face d'entrée du prisme au point C de coordonnées $x = x_e$ et $y = 0$ avec une pente $x_e^{'} = \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=0}$.

Montrer que la coordonnée x_s du point d'intersection de la trajectoire avec la face de sortie du prisme et la pente $x_s^{'}$ de la trajectoire en ce point se déduisent de la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{x_s}{R} \\ x_s^{'} \\ R\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_e}{R} \\ x_e^{'} \\ R\alpha \end{pmatrix}$$

Exprimer T_{13} et T_{23} en fonction de φ et $\varepsilon_r = Rk_r$.