

MECANIQUE DU SOLIDE

PROBLEME

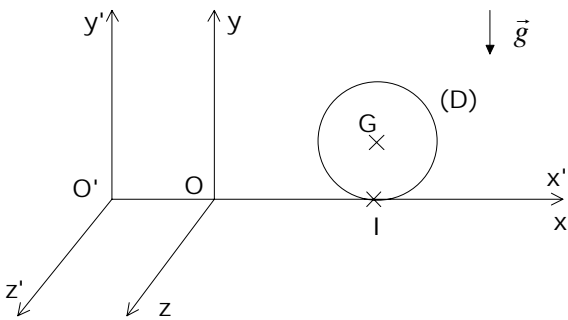
-PROBLEME DE MECANIQUE DU SOLIDE 1-

• **ENONCE :**

« Différents mouvements d'un disque »

- Dans tout le problème, on s'intéresse aux mouvements d'un disque homogène de masse m et de rayon a , de centre d'inertie G ; son moment d'inertie par rapport à un axe passant par G est noté J , et vaut : $J = \frac{1}{2}ma^2$.
- Le plan du disque reste toujours confondu avec le plan vertical xOy .

I. Mouvement d'un disque dans un référentiel non galiléen



Le disque (D) se déplace le long de l'axe Ox horizontal d'un référentiel $Oxyz$. Ce référentiel est en translation uniformément accélérée par rapport à un référentiel galiléen $O'x'y'z'$: on note $\vec{\gamma} = \gamma \vec{e}_x$ cette accélération. On appelle \vec{R} la force de contact s'exerçant sur (D) au point I ; on note f le coefficient de frottement de glissement supposé constant. A $t=0$, les points O, O' et I sont confondus, et **toutes** les vitesses sont nulles.

- 1.1) On suppose qu'il n'y a pas glissement : déterminer le mouvement du disque dans le référentiel $Oxyz$; en déduire les composantes T et N de la force \vec{R} sur les axes respectifs Ox et Oy .
- 1.2) A quelle condition y a-t-il effectivement non glissement ?
- 1.3) Calculer de deux manières différentes la puissance fournie par \vec{R} au disque dans le référentiel $Oxyz$, puis dans le référentiel $O'x'y'z'$; on fera d'abord un calcul « direct », puis on appliquera le Théorème de la puissance cinétique.
Est-il paradoxal de trouver que la puissance de la force de frottement est **positive** dans le référentiel $O'x'y'z'$? Expliquer.
- 1.4) Le référentiel $Oxyz$ effectue maintenant des oscillations telles que :

$$\vec{O'O} = (X_0 \cos \omega t; 0; 0)$$

Calculer l'amplitude des oscillations du point G , dans le référentiel $Oxyz$, en supposant qu'il n'y a toujours pas de glissement.

Quelle est la valeur maximale de X_0 pour que l'on reste dans ce cas ?

(comme précédemment, les conditions initiales sont nulles).

II. Mouvement d'un disque sur un plan incliné

• Le référentiel Oxyz est maintenant **fixe**, mais l'axe Ox est incliné **vers le bas** d'un angle α ($0 < \alpha < \pi/2$) par rapport à l'axe O'x' horizontal.

- 2.1) Initialement, le disque est immobile et le point I est confondu avec O : on le lâche à $t=0$. Etudier le mouvement ultérieur de (D) dans le référentiel Oxyz (on calculera en particulier l'abscisse x du point G).
- 2.2) Montrer qu'il y a glissement ou non, selon la position de α par rapport à une valeur particulière α_L que l'on exprimera en fonction de f ; comparer les deux types de mouvement pour $\alpha = \alpha_L$.
- 2.3) On suppose $\alpha < \alpha_L$; à l'instant $t=0$, le point I est confondu avec O, mais on communique au disque (D) une vitesse initiale $\vec{v}_0 = (v_0; 0; 0)$ et une vitesse angulaire $\vec{\omega}_0 = (0; 0; \omega_0)$.
 - a) Montrer que, quelles que soient les vitesses v_0 et ω_0 , le mouvement finit par se transformer en un mouvement de roulement sans glissement ; on pourra introduire le coefficient ε qui vaut $+1$ lorsque la vitesse de glissement initiale $(v_0 + a\omega_0)$ est positive, et -1 lorsque cette même vitesse est négative.
 - b) Calculer la durée t_1 de la phase de glissement ; déterminer l'expression de $x(t)$ quel que soit l'instant t .
- 2.4) Toujours dans l'hypothèse où $\alpha < \alpha_L$, le disque est lancé vers le bas ($v_0 > 0$ et ω_0 est quelconque) ; pour $t < t_1$, montrer que, selon le signe de ε et la valeur de α , le mouvement de G peut être accéléré ou ralenti.
 En particulier, dans le cas où le mouvement est ralenti, montrer qu'il peut exister une valeur minimale de ω_0 , notée ω_1 , pour laquelle le disque (D) remonte le long du plan incliné avant la fin du glissement (on appellera t_2 l'instant où ce phénomène se produit).
- 2.5) Représenter les variations de la vitesse de G en fonction du temps, selon les valeurs de ε , α et ω_0 ; calculer t_2 en fonction de g, v_0, α et f ; en déduire la vitesse v_1 de G, en fin de glissement, en fonction de $a, \alpha, f, \omega_0, \varepsilon$ et ω_1 .
- 2.6) On suppose $v_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\tan \alpha < f$; montrer qu'il existe une valeur minimale de ω_0 , notée ω_2 , pour laquelle le disque (D) peut remonter jusqu'au point O avant la fin du glissement.

• **CORRIGE :** « Différents mouvements d'un disque »

1.1) Appliquons le Théorème du centre d'inertie au disque (D), dans le référentiel Oxyz **non galiléen** : il faudra tenir compte de **forces d'inertie** ; cependant, comme le référentiel Oxyz est en **translation** par rapport à un référentiel galiléen, la **force de Coriolis** est **nulle**.

• Par ailleurs, la force d'inertie d'entraînement s'écrit dans le cas d'une translation :

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{ie} = -m\vec{\gamma} \Rightarrow$ en notant simplement \vec{a} l'accélération du centre d'inertie G, il vient :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{R} = m\vec{g} - m\vec{\gamma} + \vec{N} + \vec{T}$$

• En projection sur les axes Ox et Oy, et en notant x l'abscisse du point G, on obtient :

$$\boxed{m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = T - m\gamma} \quad (1) \quad \boxed{0 = N - mg} \quad (2)$$

Rq : on ne connaît pas le sens de \vec{T} , donc le signe de $T \Rightarrow$ dans tout le problème, T désignera une **valeur algébrique** (> 0 ou < 0).

• Les forces $m\vec{g}$ et \vec{N} passant par le point G, elles ont un moment nul en ce point ; le théorème du moment cinétique en G, appliqué dans le référentiel barycentrique du disque, et projeté sur l'axe Gz, fournit l'équation :

$$\boxed{J \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{2} ma^2 \times \frac{d\omega(t)}{dt} = (\vec{GI} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e}_z = a \times T} \quad (3)$$

Rq : $\omega(t)$ est la vitesse de rotation du disque sur lui-même, le sens « plus » de rotation étant le **sens trigo**, compte tenu de l'orientation de l'axe Oz.

• Enfin, le roulement sans glissement se traduit par :

$$\vec{v}_{I_1 \in sol / sol} = \vec{0} = \vec{v}_{I_2 \in disque / sol} = \vec{v}_{G / sol} + \vec{IG} \wedge \vec{\omega} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + a\omega(\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) \Rightarrow \boxed{\frac{dx(t)}{dt} + a\omega(t) = 0} \quad (4)$$

• On injecte (4) dans (3) pour obtenir : $T = -\frac{1}{2} m \frac{d^2 x}{dt^2}$ (5)

• En reportant (5) dans (1), il vient :

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{2}{3} \gamma} \quad (6) \Rightarrow \text{compte tenu des conditions initiales } \frac{dx}{dt}(0) = 0 \text{ et } x(0) = 0, \text{ on a :}$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{2}{3} \gamma \times t} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = -\frac{\gamma}{3} \times t^2}$$

Rq : le disque recule par rapport au référentiel Oxyz (puisque $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{Oxyz} < 0$), mais avance dans le

référentiel O'x'y'z', puisque $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{O'x'y'z'} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{Oxyz} + v_{Oxyz/O'x'y'z'} = -\frac{2}{3} \gamma t + \gamma t = \frac{\gamma}{3} t > 0$.

• La relation (2) fournit : $\boxed{N = mg}$; les relations (5) et (6) conduisent à : $\boxed{T = \frac{m\gamma}{3} > 0}$