Calcul matriciel

Enoncés

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 7y + 9z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 5x + 6y + 2z = 0 \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Soient a, b, c et d quatre réels. Donner une condition nécessaire et suffisant pour que le système suivant soit un système de Cramer :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}.$$

3) Déterminer les produits AB et BA dans les cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $A = (a_1 \ldots a_n)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

4) Montrer que A est inversible et calculer son inverse avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire que : $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$.

b) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

6) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n I + \beta_n J.$$

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 que l'on précisera. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

Correction

1) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} 7y+9z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 5x+6y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ et donc $(L_3 \leftrightarrow L_2 \leftrightarrow L_1)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ soit encore $(L_2 \leftarrow 5L_1 - 2L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ d'où $(L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 7y+9z=0 \end{cases}$$ soit finalement :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 7y=-9z \end{cases}$$ et donc :

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \{(8z,-9z,7z), z \in \mathbb{R}\}}$

2) Le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ admettant une unique solution si, et seulement si, la matrice $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, on peut conclure :

$\boxed{\text{Le système } \begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \text{ est un système de Cramer si, et seulement si, } ad-bc \neq 0}$

3) a) ■ On a :