Calcul matriciel

Enoncés

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 7y+9z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 5x+6y+2z=0 \end{cases} \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

2) Soient a, b, c et d quatre réels. Donner une condition nécessaire et suffisant pour que le système suivant soit un système de Cramer :

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}.$$

3) Déterminer les produits AB et BA dans les cas suivants :

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $A=(a_1 \ldots a_n)$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

4) Montrer que A est inversible et calculer son inverse avec $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Soit la matrice $M=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire que : $M^3+2M^2-M-2I=0$.

b) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

6) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n I + \beta_n J.$$

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 que l'on précisera. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Correction

1) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases}7y+9z=0\\2x+y-z=0\\5x+6y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&7&9\\2&1&-1\\5&6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ et donc $(L_3\leftrightarrow L_2\leftrightarrow L_1)$:

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&-1\\5&6&2\\0&7&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ soit encore $(L_2\leftarrow 5L_1-2L_2)$:

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&-7&-9\\0&7&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ d'où $(L_3\leftarrow L_3+L_2)$:

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&-7&-9\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z=0\\7y+9z=0\end{cases}$$ soit finalement :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z=0\\7y=-9z\end{cases}$$ et donc :

L'ensemble des solutions du système est $\{(8z,-9z,7z),z\in\mathbb{R}\}$

2) Le système $\begin{cases}ax+by=e\\cx+dy=f\end{cases}$ admettant une unique solution si, et seulement si, la matrice $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est inversible, on peut conclure :

Le système $\begin{cases}ax+by=e\\cx+dy=f\end{cases}$ est un système de Cramer si, et seulement si, $ad-bc\neq 0$

3) a) ■ On a :

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.