



Énoncés

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 7y + 9z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 5x + 6y + 2z = 0 \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Soient a , b , c et d quatre réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système suivant soit un système de Cramer :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

3) Déterminer les produits AB et BA dans les cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $A = (a_1 \dots a_n)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

4) Montrer que A est inversible et calculer son inverse avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 . En déduire que : $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$.

b) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

6) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n I + \beta_n J.$$

- b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 que l'on précisera. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n .

Correction

1) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} 7y+9z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 5x+6y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } (L_3 \leftrightarrow L_2 \leftrightarrow L_1):$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soit encore } (L_2 \leftarrow 5L_1 - 2L_2):$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } (L_3 \leftarrow L_3 + L_2):$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et donc :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 7y+9z=0 \end{cases} \text{ soit finalement :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 7y=-9z \end{cases} \text{ et donc :}$$

L'ensemble des solutions du système est $\{(8z, -9z, 7z), z \in \mathbb{R}\}$

2) Le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ admettant une unique solution si, et seulement si, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, on peut conclure :

Le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ est un système de Cramer si, et seulement si, $ad-bc \neq 0$

3) a) ■ On a :