Calcul matriciel

Méthodes

1. Opérations sur les matrices

- *Somme de deux matrices.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **et** $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **. La somme des matrices A et B est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C=A+B définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

- *Produit d'une matrice par un scalaire.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **et $\lambda\in\mathbb{K}$. Le produit de la matrice A par le scalaire λ est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C=λA définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=\lambda a_{i,j}$.

- *Produit de deux matrices.* **Soient n, m et p trois entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **et $B\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$,** $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le m}}$ **. Le produit des matrices A et B est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, C=AB définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$, $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$.

- *Transposée d'une matrice.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **. La transposée de la matrice A est la matrice $C\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C={}^tA$ définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, $c_{i,j}=a_{j,i}$.

  Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On a ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, ${}^t(\lambda A)=\lambda{}^tA$. De plus, on a pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$: ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$. Enfin, si A est inversible, ${}^tA$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

- *Matrice symétrique.* **Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est symétrique si et seulement si : ${}^tA=A$.**

2. Inversibilité d'une matrice et détermination de son inverse éventuelle.

Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$

- **Soient n un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB=I_n$ ou $BA=I_n$ (et si l'une de ces égalités est vérifiée, alors $AB=BA=I_n$). Lorsque A est inversible, B est appelée inverse de A et on note $B=A^{-1}$.**
- **Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$. Attention… il ne s'agit pas d'un espace vectoriel.**