



Méthodes

1. Opérations sur les matrices

- **Somme de deux matrices.** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. La somme des matrices A et B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$C=A+B$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

- **Produit d'une matrice par un scalaire.** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit de la matrice A par le scalaire λ est la

matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C=\lambda A$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, c_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

- **Produit de deux matrices.** Soient n , m et p trois entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$. Le produit des matrices A et B est la

matrice $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $C=AB$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ où :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

- **Transposée d'une matrice.** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. La transposée de la matrice A est la matrice $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C = {}^tA$

définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ où :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, c_{i,j} = a_{j,i}.$$

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$. De plus, on a pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$: ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$. Enfin, si A est inversible, tA est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

- **Matrice symétrique.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est symétrique si et seulement si : ${}^tA = A$.

2. Inversibilité d'une matrice et détermination de son inverse éventuelle.**Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$**

- Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ (et si l'une de ces égalités est vérifiée, alors $AB = BA = I_n$). Lorsque A est inversible, B est appelée inverse de A et on note $B = A^{-1}$.
- Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$. Attention... il ne s'agit pas d'un espace vectoriel.